カッパ分布とプラズマ粒子シミュレーションのための数値解法

Numerical methods for Kappa distributions in kinetic plasma simulations

銭谷誠司 (Seiji Zenitani)[1,2]

[1] オーストリア科学アカデミー 宇宙科学研究所 [a]

[2] *Space Research Institute, Austrian Academy of Sciences, Schmiedlstraße 6, 8042 Graz, AUSTRIA*

(Dated: 原稿受付：2025 年 1 月 21 日)

宇宙空間物理学では、高エネルギー領域に「べき乗」成分をもつカッパ分布（Kappa distribution）が重要だと考えられている。カッパ分布は最近、ボルツマン統計力学の拡張の１つであるツァリス統計力学との類似性が明らかになり、背景に未解明の理論が隠れていると期待されている。本稿では、カッパ分布の基礎的な性質とツァリス統計力学との類似性を紹介し、今後、理論背景を解明するための有力手段であるプラズマ粒子シミュレーションで、カッパ分布を使うための数値解法を紹介する。

Keywords: Kappa distribution, velocity distribution function, Tsallis statistics, particle-in-cell simulation, Monte-Carlo methods

I. はじめに

宇宙空間物理学では、高エネルギー部分に「べき乗」成分をもつカッパ分布（Kappa distribution）という速度分布関数を議論することが多い。カッパ分布は 1960 年代に Olbert, Vasyliunus らのグループによって観測データを説明する経験的数式モデルとして提案された。[27,39] その後、太陽・太陽風・太陽圏深部といったさまざまな場所でプラズマ観測が進むにつれて、分布関数の高エネルギー領域に「べき乗」成分が頻繁に観測されるようになり [18,22,30]、熱的コア成分と高エネルギー「べき乗」成分を同時に扱うことができるカッパ分布の有用性が認知されてきた。そうした中、カッパ分布と、ボルツマン統計力学を拡張したツァリス統計力学とが理論的に関連していることが示唆され [21,22]、観測されるカッパ分布の背景に未解明の理論的・物理的根拠があるという期待が高まっている。現在、カッパ分布は、マクスウェル分布に次いで重要な、宇宙空間プラズマの基本速度分布関数の１つだと認知されている。

本稿では、個々のプラズマ粒子の運動を解き進めるプラズマ粒子（Particle-in-cell; PIC）シミュレーションを念頭に、カッパ分布の基礎的な性質とシミュレーションでの実践的な利用方法を解説する。まず、II 章でカッパ分布の基礎的な性質を概観し、III 章で理論背景であるツァリス統計力学との関係を述べる。続く IV 章では PIC シミュレーションのためのカッパ分布の乱数生成方法を紹介し、V 章でさまざまなカッパ分布の派生形と応用分野を紹介する。最後の VI 章で本稿を総括する。

II. カッパ分布

最初に、プラズマ速度分布関数の基本形であるマクスウェル分布から出発する。等方的なマクスウェル分布の位相空間密度 f_M は

$$f_{\rm M}(\boldsymbol{v})d^3v = N\Big(\frac{1}{\pi\theta_M^2}\Big)^{\frac{3}{2}}\exp\Big(-\frac{\boldsymbol{v}^2}{\theta_M^2}\Big)d^3v \tag{1}$$

と表される。ここで N はプラズマの数密度、θ_M は最頻速度（熱速度）である。マクスウェル分布のプラズマが持つエネルギー密度 $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E} = \frac{3}{4}Nm\theta_M^2 = \frac{3}{2}NT_M \tag{2}$$

となる。T_M はボルツマン定数を含むプラズマ温度である。

対して、本稿で議論するカッパ分布のよく使われる表式は以下の通りである。

$$f_\kappa(\boldsymbol{v})d^3v = \frac{N}{(\pi\kappa\theta^2)^{3/2}}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)}\left(1+\frac{\boldsymbol{v}^2}{\kappa\theta^2}\right)^{-(\kappa+1)}d^3v \tag{3}$$

κ はカッパ分布を特徴づけるカッパ指数（kappa index）、θ は最頻速度、$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。等方分布の場合、$d^3v = 4\pi v^2 dv$ として極座標系に移り

$$F_\kappa(v) \equiv f_\kappa(v)4\pi v^2 \tag{4}$$

を考えると便利である。例えば、$(d/dv)F_\kappa(v) = 0$ から直ちに最頻値 $v = \theta$ を確認することができる。

カッパ分布（(3) 式）の特徴は、$v \gg \theta$ の高エネルギー側の速度分布が「べき」乗でゆっくり減衰していくことである。べき指数は物理量に応じて

$$f_\kappa(\boldsymbol{v})d^3v \sim v^{-2(\kappa+1)}d^3v \tag{5}$$

$$f_\kappa(v)dv \sim v^{-2\kappa}dv \tag{6}$$

$$f_\kappa(\varepsilon)d\varepsilon \sim \varepsilon^{-\kappa-1/2}d\varepsilon \tag{7}$$

となる。これに対して $v \ll \theta$ の低エネルギー側はマクスウェル分布に近い性質を持っている。カッパ分布は、「べき」乗の非熱的高エネルギー成分と熱的な低エネルギー成分を同時に備えたハイブリッド分布であり、粒子加速を議論する場合に便利である。

カッパ分布は $\kappa \to \infty$ のとき、マクスウェル分布に漸近する。実際、(3) 式の $\kappa \to \infty$ の極限をとると

$$\lim_{\kappa^*\to\infty}\left(1+\frac{v^2}{\kappa\theta^2}\right)^{-(\kappa+1)} \sim \lim_{\kappa^*\to\infty}\exp\left(-\frac{\kappa^* v^2}{\kappa\theta^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{v^2}{\theta^2}\right) \tag{8}$$

[a] Electronic mail: seiji.zenitani@oeaw.ac.at

となる。途中、$\kappa^* \equiv \kappa + 1$ と置き換えて、指数関数の公式

$$\lim_{\kappa^* \to \infty} \left(1 + \frac{x}{\kappa^*}\right)^{-\kappa^*} = \exp(-x) \tag{9}$$

を用いた。実用上は、$\kappa = 3 \sim 6$ の小さな値を用いることが多い。

カッパ分布（(3) 式）の例を図 1 に示す。フォーマットやべき指数 κ の値は、カッパ分布の応用研究の 1 つとして有名な Summers & Thorne[34] 論文の図 1 に合わせたものである。κ の値が小さな場合には、$v/\theta \gg 1$ 領域に「べき乗」成分が顕著に見えていること、また、κ が大きくなるにつれて分布関数がマクスウェル分布（点線）に近づいていくようすがわかる。数学的には、カッパ分布は統計学の基本分布の 1 つである t 分布（「スチューデントの t 分布」ともいう）の多変量版に相当し、t 分布も同じ極限で多変量正規分布（=マクスウェル分布）に収束する。

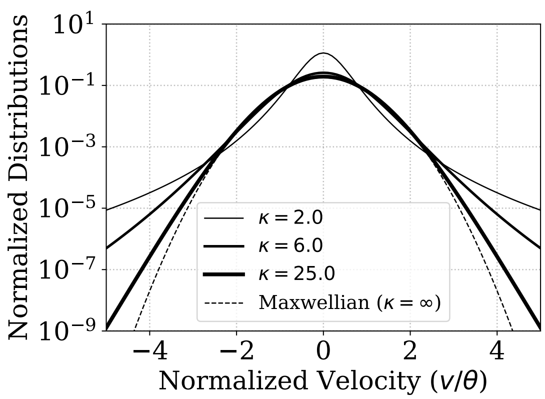

FIG. 1. カッパ分布の関数形のサンプル。カッパ分布は $\kappa = \infty$ の極限でマクスウェル分布（点線）に収束する。

次に、統計関数を用いてカッパ分布の性質をもう少し議論する。ここでは、ベータプライム分布（第 2 種ベータ分布）を拡張した一般化ベータプライム分布（Generalized beta-prime distribution）を利用する。

$$\mathrm{B}'(x;\alpha,\beta,k,\lambda) = \frac{k}{\lambda B(\alpha,\beta)} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha k - 1} \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)^{-(\alpha+\beta)} \tag{10}$$

$$\int \mathrm{B}'(x;\alpha,\beta,k,\lambda)dx = 1 \tag{11}$$

一般化ベータプライム分布 $\mathrm{B}'(x)$ は 4 つのパラメーターをとる。$B(\alpha,\beta)$ はベータ関数とその 2 つの引数、k は形状パラメーター, λ はスケールパラメーターである。(10) 式を使うと、カッパ分布の極座標形（(4) 式）を

$$F_\kappa(v)dv = N\mathrm{B}'\left(v; \frac{3}{2}, \kappa - \frac{1}{2}, 2, (\kappa\theta^2)^{1/2}\right) dv. \tag{12}$$

と書くことができる。この延長で、カッパ分布プラズマのエネルギー密度 $\mathcal{E}$ を考えると

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}mv^2\right) F_\kappa(v)dv \\ &= \frac{1}{2}Nm\frac{B(\frac{5}{2},\kappa-\frac{3}{2})}{B(\frac{3}{2},\kappa-\frac{1}{2})}\kappa\theta^2 \left\{\int_0^\infty \mathrm{B}'\left(v;\frac{5}{2},\kappa-\frac{3}{2},2,(\kappa\theta^2)^{1/2}\right)dv\right\} \\ &= \frac{3}{4}\frac{\kappa}{\kappa-3/2}Nm\theta^2\end{aligned} \tag{13}$$

となる。$\kappa = 3/2$ でエネルギー密度が無限大に発散するため、カッパ指数は $\kappa > 3/2$ でなければならない。自由度 3、温度 T のプラズマ系のエネルギー密度が

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}NT \tag{14}$$

であることと、(13) 式を比べて、カッパ分布の実効温度

$$T_{\mathrm{eff}} = \frac{\kappa}{2\kappa - 3}m\theta^2 \tag{15}$$

を得ることができる。$\kappa \to \infty$ のとき、(15) 式はマクスウェル分布のもの（(2) 式）と一致する。

なお、カッパ分布は (3) 式のほかに

$$f_\kappa^*(\boldsymbol{v})d^3v = \frac{N}{(\pi\kappa^*[\theta^*]^2)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa^*)}{\Gamma(\kappa^*-3/2)} \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}^2}{\kappa^*[\theta^*]^2}\right)^{-\kappa^*} d^3v \tag{16}$$

の形で使われることもある。[19] (3) 式と (16) 式は、

$$\kappa^* = \kappa + 1, \quad \theta^* = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}}\theta \tag{17}$$

と置き換えて、お互いに変換することができる。

III. ツァリス統計力学

カッパ分布は、通常のボルツマン・ギブス統計力学の枠組みを拡張したツァリス（Tsallis）統計力学と関連していると考えられている。ツァリス統計力学は、大きく言うと (1) エントロピーの表式を拡張 [35] したうえで、(2) 期待値の扱いに新しい原理 [36] を取り入れた統計力学である。ツァリス統計の解説は本誌旧記事を含む文献・書籍に譲るが [21,22,37,43,45]、本稿でも必要最小限の概要を説明する。

ボルツマン・ギブス統計では、以下のようにエントロピーを定義する。

$$S_B \equiv -\sum_i p_i \ln p_i \tag{18}$$

簡単のため、ここではボルツマン定数を無視した。p_i は i 番目の物理状態をとる確率で、$\sum p_i = 1$ を満たす。よく知られている通り、内部エネルギーが一定のときに (18) 式のボルツマン・エントロピーを最大化する分布関数が、(1) 式のマクスウェル分布である。さらに 1 つの系内で、統計的に独立な 2 つの事象、A, B が起こるとすると、両

者が同時に起きる事象と、各部分系のそれぞれのエントロピーは

$$S_B(A+B) = S_B(A) + S_B(B) \tag{19}$$

を満たすことが知られている。この性質をボルツマン・エントロピーの加法性と呼ぶ。

しかし、これらの議論は、局所局所で粒子が相互作用する系を前提としている。重力ポテンシャルを通じて遠隔相互作用する星団系や、電磁場を介する無衝突プラズマ系に、これらの議論を適用して良いかどうか自明ではない。[37] そこで、制約の 1 つ（具体的には加法性）を緩める形でエントロピーを拡張し、これを起点に統計力学を再構成する、さまざまな非加法的（nonextensive）統計力学が提案されてきた。ツァリス統計力学はその中で最も成功し、支持を得ているものである。

Tsallis[35] が提案した拡張エントロピー S_q を (20) 式に示す。これは今日、ツァリス・エントロピーと呼ばれているものである。

$$S_q \equiv \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum p^q\right) = \frac{1}{q-1}\sum (p - p^q) \tag{20}$$

q はエントロピー指数（Entropy index）と呼ばれる拡張パラメーターであり、$q=1$ のとき、$S_{q=1} = S_B$ となってボルツマン・エントロピー（(18) 式）に帰着する。先ほどの例と同様、2 つの独立事象 A, B を考えると、ツァリス・エントロピーは

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \tag{21}$$

となり、$q \neq 1$ のときに加法性を満たさない。また、導出を別の文献 [37,45] に譲るが、ツァリス・エントロピーを最大化する速度分布関数が q-正規分布と呼ばれる分布関数

$$f_q(\boldsymbol{v})d^3v \sim \left(1 - \frac{1-q}{3-q}\frac{\boldsymbol{v}^2}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} d^3v \tag{22}$$

であることがわかっている。エントロピー最大化の帰結として、自然界で頻繁に観測される「べき」乗分布が登場することもツァリス統計力学の特徴の 1 つである。

ツァリス統計力学では、上記のツァリス・エントロピーに加えて、確率 p を q 乗で重みづけた「エスコート確率」P を利用する。[3,36] 通常確率 p とエスコート確率 P は、以下のように換算することができる。

$$P = \frac{p^q}{\sum(p^q)}, \quad p = \frac{P^{1/q}}{\sum(P^{1/q})} \tag{23}$$

そして、物理量 $f(x)$ の期待値をエスコート確率を用いて算出する。これを q-期待値と呼ぶ。

$$\mathbb{E}_q[f(x)] = \int f(x)P(x)dx = \frac{\int f(x)p(x)^q dx}{\int p(x)^q dx} \tag{24}$$

実は (22) 式の導出過程でも q-期待値を使っている。そして (22) 式を q 乗して重みづけしたエスコート確率の分布は

$$f_q(\boldsymbol{v})d^3v \sim \left(1 - \frac{1-q}{3-q}\frac{\boldsymbol{v}^2}{\theta^2}\right)^{\frac{q}{1-q}} d^3v \tag{25}$$

となる。ここで

$$\kappa = \frac{1}{q-1}, \quad q = 1 + \frac{1}{\kappa} \tag{26}$$

として変数変換すると、(16) 式のカッパ分布を q-正規分布（(22) 式）に、(3) 式のカッパ分布をエスコート分布（(25) 式）に対応させることができる。ツァリス統計の世界では、エスコート確率 P が実質的な確率分布の役割を果たすため、(3) 式のカッパ分布がより理論と整合する、とされている。[21]

IV. カッパ分布の乱数生成法

カッパ分布を含むさまざまな運動論プラズマ素過程を研究する有力手段の 1 つが、プラズマ粒子 (PIC) シミュレーションやモンテカルロシミュレーションである。[4,12] これらのシミュレーションでは、計算の最初に粒子の速度を乱数で初期化することが多い。[44] 粒子の速度分布は多くの場合、マクスウェル分布を想定しているが、カッパ分布プラズマをシミュレーションする場合には当然、カッパ分布を使う必要がある。本章では、PIC シミュレーション等で、カッパ分布に従う粒子の速度分布を乱数で生成する方法を紹介する。

準備のため、マクスウェル分布（(1) 式）の乱数生成法を復習する。(1) 式は 3 方向が独立した正規分布であるから、正規分布に従う乱数 n_1, n_2, n_3 を 3 つ用意して

$$v_x = \sigma n_1, \quad v_y = \sigma n_2, \quad v_z = \sigma n_3, \tag{27}$$

とすれば良い。$\sigma^2 = (1/2)\theta_{\rm M}^2$ は正規分布の分散である。正規乱数を生成するには、数学ライブラリの正規乱数生成ルーチンを使うか、移植性を考えて自分で Box–Muller[5] 法を実装すれば良い。Box–Muller[5] 法は、2 つの独立した一様乱数 $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ を使って

$$n_1 = \sqrt{-2\ln X_1}\sin(2\pi X_2) \tag{28}$$

$$n_2 = \sqrt{-2\ln X_1}\cos(2\pi X_2) \tag{29}$$

の手順で 2 つの正規乱数 $n_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ を生成する。$\mathcal{N}(0,1)$ は平均 0、分散 1 の正規分布である。生成される n_1, n_2 の分布はそれぞれ独立である。

次に、マクスウェル分布（(1) 式）を極座標系に移して ($d^3v = 4\pi v^2 dv$)、変数 $x \equiv (v^2/v_M^2)$ で書き換えると

$$f_{\rm M}(x)dx = \frac{2N_M}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} e^{-x} dx = N_M {\rm Ga}\left(x; \frac{3}{2}, 1\right) dx \tag{30}$$

となる。ここで

$${\rm Ga}(x;k,\lambda) = \frac{x^{k-1}e^{-x/\lambda}}{\Gamma(k)\lambda^k}, \quad \int_0^\infty {\rm Ga}(x;k,\lambda)\ dx = 1 \tag{31}$$

はガンマ分布であり、k, λ をそれぞれ形状パラメーター、スケールパラメーターと呼ぶ。(30) 式は、マクスウェル分布の速度 ($|v|$) 分布がガンマ分布に従うことを示している。

TABLE I. カッパ分布の乱数生成法。

input: $\kappa > 3/2,\ \theta > 0$
generate $n_1, n_2, n_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$
generate $\chi^2_\nu \sim \mathrm{Ga}(\kappa - 1/2, 2)$
$r \leftarrow \sqrt{\kappa\theta^2/\chi^2_\nu}$
$v_x \leftarrow rn_1$
$v_y \leftarrow rn_2$
$v_z \leftarrow rn_3$

転じて、ガンマ分布に従って分布するガンマ乱数 $X_{\mathrm{Ga}(\alpha,\beta)}$ を使えば、マクスウェル分布の速度 $|v|$ を乱数生成することができる。

$$v = \theta_M \sqrt{X_{\mathrm{Ga}(3/2,1)}} = \sigma \sqrt{X_{\mathrm{Ga}(3/2,2)}}. \tag{32}$$

それではカッパ分布の話に戻ろう。一般化ベータプライム分布（(10) 式）に従う乱数は

$$X_{\mathrm{B}'(\alpha,\beta,k,\lambda)} = \lambda \left(X_{\mathrm{B}'(\alpha,\beta,1,1)} \right)^{1/k} = \lambda \left(\frac{X_{\mathrm{Ga}(\alpha,\delta)}}{X_{\mathrm{Ga}(\beta,\delta)}} \right)^{1/k} \tag{33}$$

という手順で生成することができる。[40] (33) 式右辺の分子と分母のガンマ乱数のスケールファクター δ は、両者が一致する限り任意のものを選んで良い。ここでは $\delta = 2$ とおく。(33) 式から、(12) 式のカッパ分布に従う速度分布を以下の手順で乱数生成できることがわかる。

$$v = \left(\kappa\theta^2 \frac{X_{\mathrm{Ga}(3/2,2)}}{X_{\mathrm{Ga}(\kappa-1/2,2)}} \right)^{1/2} \tag{34}$$

さらに (34) 式の右辺の分母は (32) 式と同じ形だから、各次元ごとに正規乱数 n_1, n_2, n_3 を生成してから、ガンマ乱数 $\chi^2_\nu = X_{\mathrm{Ga}(\kappa-1/2,2)}$ の平方根で割ってやれば、カッパ分布を乱数生成できることがわかる。

$$v_x = \frac{\sqrt{\kappa\theta^2}\ n_1}{\sqrt{\chi^2_\nu}}, \quad v_y = \frac{\sqrt{\kappa\theta^2}\ n_2}{\sqrt{\chi^2_\nu}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{\kappa\theta^2}\ n_3}{\sqrt{\chi^2_\nu}}, \tag{35}$$

このアルゴリズムを表 I に示す。ガンマ乱数を生成するためには、数値計算ライブラリを使うか、あるいは Marsaglia & Tsang[24] の方法を使えば良いだろう。後者の方法の詳細は、原論文あるいは当該分野の教科書を参照していただきたい。[17,24,31,46] なお、$\nu\ (\equiv 2\kappa - 1)$ が整数のとき、表 I の 2 行目のガンマ乱数の分布は自由度 ν のカイ自乗分布と等価である。多変量 t 分布であるカッパ分布を乱数生成するためには、多変量正規分布を自由度 ν のカイ自乗分布 χ^2_ν で割ってやればよいことは知られており、[1,13,17] 表 I はこの有名な方法と一致する。

表 I のアルゴリズムで、10^6 個の粒子を使って $\kappa = 3.5$ のカッパ分布を生成した結果を図 2 に示す。速度の関数 $F(|v|)$ の形で、数値結果（青色のヒストグラム）と解析解（黒の実線）を比較しており、両者がよく一致することがわかる。黒の点線は $v_0 = \theta$ でカッパ分布に内接するマクスウェル分布である。これを基準にすると、高エネルギー帯の「べき」乗分布が見やすいだろう。べき指数が $\approx 2\kappa$ であることや、カッパ分布の最頻速度が $|v| = \theta$ であることも確認できる。

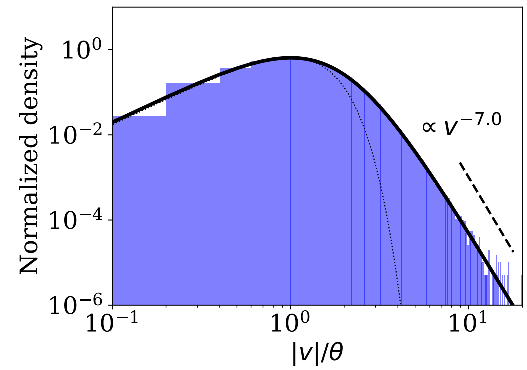

FIG. 2. $\kappa = 3.5$ のカッパ分布に従って乱数生成した粒子速度分布（青色のヒストグラム）と解析解（黒線）。黒の点線は内接マクスウェル分布。

V. さまざまなカッパ分布

II 章で紹介した基本形のほかに、カッパ分布のさまざまな発展形・派生形が考えられている。本章では宇宙空間・天体プラズマ研究で重要な、カッパロスコーン分布、相対論的カッパ分布、正則化カッパ分布の 3 つを簡単に紹介する。

太陽のコロナループや磁化惑星のダイポール磁場などのループ磁場領域では、ピッチ角（速度ベクトルと磁力線のなす角）の大きな粒子がミラー反射で閉じ込められる一方、ピッチ角の小さな粒子が磁力線に沿って流出する。そのため、速度分布関数は、磁力線方向に穴が空いた「ロスコーン」を形成する。そして、ロスコーンと高エネルギーのべき乗成分を同時に扱うのが、カッパ分布とロスコーン分布を組み合わせたカッパロスコーン（Kappa Loss-Cone; KLC）分布である。[34]

$$f(\boldsymbol{v}) = \frac{N}{\pi^{3/2}\theta_\parallel \theta_\perp^2 \kappa^{j+3/2}} \frac{\Gamma(\kappa+j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\kappa-1/2)} \times \left(\frac{v_\perp}{\theta_\perp} \right)^{2j} \left(1 + \frac{v_\parallel^2}{\kappa\theta_\parallel^2} + \frac{v_\perp^2}{\kappa\theta_\perp^2} \right)^{-(\kappa+j+1)} \tag{36}$$

$j \geq 0$ はロスコーンの形状を決めるロスコーン指数で、磁力線水平・垂直方向の熱速度を $\theta_\parallel, \theta_\perp$ としている。また、生成原理を踏まえ、ロスコーンの形状がピッチ角 α のみで決まるとして、以下のような分布関数を使うこともある。[15,41]

$$f(\boldsymbol{v}) = \frac{N}{\pi^2\theta^3\kappa^{3/2}} \frac{2\Gamma(j+3/2)\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\kappa-1/2)} \times \left(\sin\alpha \right)^{2j} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa\theta^2} \right)^{-(\kappa+1)} \tag{37}$$

こうした KLC 分布は、主にプラズマ波動の伝搬・生成といった理論研究で使われてきた。最近、PIC シミュレーションのために、正規乱数やガンマ乱数を組み合わせ、これらの KLC 分布を乱数生成する数値解法を筆者らが提案したところである。[41] 本稿では詳細には触れないが、提案手法を用いて、10^6 個の粒子を用いて、$j = 2$, $\kappa = 3.5$ の KLC 分布（(37) 式）を乱数生成した結果を図 3 に示す。磁力線の向きを基準にした $v_\parallel$-$v_\perp$ 平面の第一象限で、位相空間密度 f を示している。縦軸（$v_\parallel$）方向にロスコーンが出来る KLC 分布の特徴がよく見えている。横軸（$v_\perp$）方向では、密度分布が v のべき乗で小さくなっていく。今後、この新しい数値解法を使って、KLC 分布を利用した PIC シミュレーション研究が立ち上がり、新しい成果が出てくることを期待している。

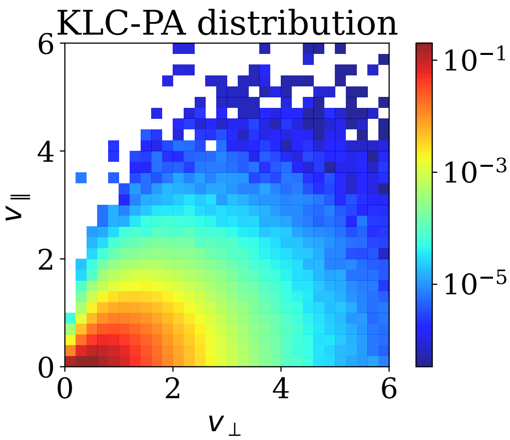

FIG. 3. カッパロスコーン分布（(37) 式）の乱数生成結果。縦軸は速度の磁力線水平方向、横軸は磁力線垂直方向を表す。[41]

高エネルギー天体プラズマ環境では、プラズマ温度 T が静止質量エネルギー mc^2 と比べて無視できないことがある。電子の場合は 512 keV が静止質量エネルギーに相当し、数百 keV ぐらいから、特殊相対論効果を加味した相対論的マクスウェル分布や相対論的カッパ分布を考える必要がある。例えば、ブラックホール近傍の電子の放射スペクトルの見積もりに相対論的カッパ分布が利用されるようになってきた。[7,28,42] 相対論的カッパ分布の表式は以下の通りである。[10,26,38,40]

$$f_{\rm RK}(\boldsymbol{p}) d^3p \sim \left(1 + \frac{(\gamma - 1)mc^2}{\kappa T_\kappa} \right)^{-(\kappa+1)} d^3p \tag{38}$$

ここで $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{1/2}$ はローレンツ因子、$\boldsymbol{p} = m\gamma \boldsymbol{v}$ は運動量、T_κ はカッパ分布の特徴温度である。κ パラメーターの定義域は、非相対論では $\kappa > 3/2$ だったのに対して、相対論的カッパ分布では $\kappa > 3$ となる。これは、相対論的エネルギーでは $p \propto \gamma$ となるため、エネルギー密度が $\propto \int^\infty \gamma f_{\rm RK}(p) p^2 dp \sim \int^\infty p^{2-\kappa} dp$ となり、べき指数 $\kappa = 3$ で無限大に発散してしまうからである。PIC・モンテカルロシミュレーションでは、ガンマ分布と棄却法を利用して分布を乱数生成する数値解法が提案されたところである。[8,40] 図 4 に、筆者らの提案手法 [40] を使って、10^6 個の粒子を用いて、特徴温度 $T_\kappa/mc^2 = 1.0$, カッパ指数 $\kappa = 3.5$ の相対論的カッパ分布を乱数生成した結果を示す。粒子の運動量 p のヒストグラム（青）が厳密解（黒線）とよく一致している。また、低エネルギーの熱的コア成分から高エネルギーの「べき」乗成分に変化する、カッパ分布の特徴がよく現れている。高エネルギー部の「べき」指数は非相対論（(6) 式）のときと違って、$\kappa - 1 = 2.5$ となる。

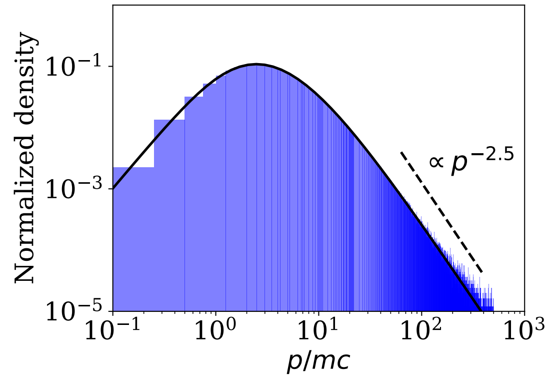

FIG. 4. 相対論的カッパ分布の乱数生成結果。[40] モンテカルロ粒子の運動量ヒストグラム（青）と厳密解（黒線）を示す。

最後の例として、最近提案された正則化カッパ分布（Regularized Kappa Distribution）を紹介する。[18,32,33] 正則化カッパ分布は、カッパ分布にカットオフ関数を掛けあわせたもので、関数形は

$$f_{RKD}(\boldsymbol{v}; \kappa, \alpha) \sim \left(1 + \frac{v^2}{\kappa \theta^2} \right)^{-(\kappa+1)} \exp\left(-\alpha^2 \frac{v^2}{\theta^2} \right) \tag{39}$$

である。α はカットオフ速度 θ/α を決めるパラメーターで、$\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$ などの小さな値を用いることが多い。正則化カッパ分布は、低エネルギーの熱的コアから出発して $v \sim \theta$ あたりから「べき」乗分布に遷移するところまでは、標準カッパ分布と同じである。しかし、$v \sim \theta/\alpha$ あたりから、減衰の速い指数関数が効き始めて分布を抑えてしまう。標準カッパ分布は $\kappa = 3/2$ でエネルギー（2 次モーメント）、$\kappa = 1/2$ で密度が発散する性質を持っていたが、正則化カッパ分布はカットオフ速度以遠の分布を強制的に打ち切るため、例えば $\kappa < 3/2$ でもエネルギー密度が発散しない。そのため正則化カッパ分布は、明示的に光速以上の速度を避けたり、一時的にハードなべきが現れる現象を議論するために役立つと期待されている。興味深いことに、正則化カッパ分布のボルツマンエントロピーは、加法的であることが示されている。[9] 正則化カッパ分布を使った PIC シミュレーション研究もこれから登場することが期待される。例えば、IV 章の方法で標準カッパ分布を生成した後、一様乱数 $X \sim U(0,1)$ を使って

$$X < \exp\left(-\alpha^2 \frac{v^2}{\theta^2} \right) \tag{40}$$

のときの結果を採用すれば（棄却法）、正則化カッパ分布を生成できるだろう。

VI. 議論

現在、PIC シミュレーションを使って運動論プラズマ現象を調べる研究が活発に行われている。しかし、問題設定の時点でカッパ分布を考慮した PIC シミュレーション研究はそれほど多くはなく、[1,16,23,25,29] シミュレーションの結果からも、「べき」乗のエネルギースペクトルのフィッティング手段としてカッパ分布を利用するぐらいであった。[14] 筆者の私見だが、問題の重要性に反して、カッパ分布のシミュレーション研究が下火だった理由の１つは、IV 章で紹介した数値解法があまり知られていなかったためだと感じている。カッパ分布と多変量 t 分布の関係を指摘して、表 I 相当の乱数生成方法を示したのは Abdul & Mace[1] であるが、その後の筆者らの仕事 [40,41] で V 章の派生形も含むカッパ分布の乱数生成方法が整備された。今後、カッパ分布を取り入れた PIC シミュレーション研究が盛んになるとともに、シミュレーション結果を活かして、プラズマ物理とツァリス統計力学との関係の理解が進むことも期待している。

運動論プラズマ分野では、PIC シミュレーションで得られた分布関数の H 関数

$$H(\boldsymbol{x}) = -\int f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \ln f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) d^3v \tag{41}$$

を使って、運動論エントロピーを議論する研究が進められている。[2,11,20] これらはプラズマ現象の可逆性という重要問題に通じるテーマでもある。今後は、カッパ分布と各種運動論エントロピーとの関係を理解したうえで、議論の枠組みにツァリス・エントロピーを取りこむことなどが面白い研究テーマになるだろう。

VII. 謝辞

本研究の一部は、科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 21K03627 および (S) 17H06140 の支援を得て行われた。

[1] R. F. Abdul and R. L. Mace, Phys. Plasmas **22**, 102107 (2015).
[2] M. R. Argall, M. H. Barbhuiya, P. A. Cassak et al., Phys. Plasmas **29** 022902 (2022).
[3] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
[4] C. K. Birdsall, A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill, New York, 1985.
[5] G. E. P. Box and M. E. Muller, *Ann. Math. Stat.* **29**, 610 (1958).
[6] E. Canfield, W. M. Howard, E. P. Liang, Astrophys. J. **323**, 565 (1987).
[7] J. Davelaar, M. Móscibrodzka, T. Bronzwaer, and H. Falcke, Astron. Astrophys. **612**, A34 (2018).
[8] J. Davelaar, B. R. Ryan, G. N. Wong, et al. MNRAS **526**, 5326 (2023).
[9] H. Fichtner, K. Scherer, M. Lazar, H. J. Fahr, and Z. Vörös, PhRvE, 98, 053205 (2018).
[10] L. Han-Thanh, K. Scherer, and H. Fichtner, Phys. Plasmas **29**, 022901 (2022).
[11] H. Hasegawa, M. R. Argall, et al.Space Science Reviews **220**, 68 (2024), section 3.2.4.
[12] R. W. Hockney & J. W. Eastwood, *Computer simulation using particles*, McGraw-Hill, New York, 1981.
[13] M. Hofert, R Journal **5**, 129 (2013)
[14] M. Hoshino, Phys. Plasmas **29**, 042902 (2022)
[15] C. F. Kennel, *Phys. Fluids* **9**, 2190 (1966).
[16] E. J. Koen, A. B. Collier, S. K. Maharaj, Phys. Plasmas **19**, 042102 (2012).
[17] D. P. Kroese, T. Taimre, and Z. I. Botev, *Handbook of Monte Carlo methods*, John Wiley & Sons. (2011),（邦訳：D. P. クローゼ、T. タイマー、Z. I. ボテフ著／伏見正則・逆瀬川浩孝監訳、モンテカルロ法ハンドブック、朝倉書店 2014）
[18] M. Lazar, and H. Fichtner (eds.), *Kappa Distributions: From Observational Evidences via Controversial Predictions to a Consistent Theory of Nonequilibrium Plasmas*, Berlin: Springer (2021).
[19] M. P. Leubner, Phys. Plasmas **11**, 1308 (2004).
[20] H. Liang, P. A. Cassak, S. Servidio, et al., Phys. Plasmas **26**, 082903 (2019).
[21] G. Livadiotis and D. J. McComas, J. Geophys. Res. **114**, A11105, doi:10.1029/2009JA014352 (2009).
[22] G. Livadiotis (ed.), *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas,* Elsevier, Amsterdam (2017).
[23] Q. Lu, L. Zhou, and S. Wang, J. Geophys. Res. **115**, A02213 (2010).
[24] G. Marsaglia and W. W. Tsang, *ACM Transactions on Mathematical Software* **26**, 363 (2000).
[25] H. Ma, J. F. Drake, M. Swisdak, Astrophys. J. **954**, 21 (2023).
[26] O. Naito, H. Yoshida, T. Hatae, A. Nagashima, and T. Matoba, Phys. Plasmas **3**, 1474 (1996)
[27] S. Olbert, in Physics of the Magnetosphere, eds. R. L. Carovillano, J. F. McClay, & H. R. Radoski (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 10; Dordrecht: Reidel), 641 (1968).
[28] A. Pandya, Z. Zhang, M. Chandra, and C. F. Gammie, Astrophys. J. , 822, 34 (2016).
[29] J. Park, C. Ren, J. C. Workman, and E. G. Blackman, Astrophys. J. **765**, 147 (2013).
[30] V. Pierrard, and M. Lazar, Sol. Phys. **267**, 153 (2010).
[31] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007)
[32] K. Scherer, H. Fichtner, and M. Lazar, Europhys. Lett. **120**, 50002 (2017).
[33] K. Scherer, H. Fichtner, H. J. Fahr, and M. Lazar, Astrophys. J. **881**, 93 (2019).
[34] D. Summers and R. M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835, doi:10.1063/1.859653 (1991).
[35] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
[36] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
[37] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Com- plex World, 2nd edition*, Springer, ISBN:978-3-030-79569-6 (2023).
[38] F. Xiao, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 203 (2006).
[39] V. M. Vasyliunas, J. Geophys. Res. **73**, 2839 (1968).
[40] S. Zenitani and S. Nakano, Phys. Plasmas **29**, 113904 (2022).
[41] S. Zenitani and S. Nakano, J. Geophys. Res. **128**, e2023JA031983 (2023).
[42] M. Zhang, Y. Mizuno, C. M. Fromm, Z. Younsi, and A. Cruz-Osorio, Astron. Astrophys. **687**, A88 (2024).
[43] 阿部 純義、プラズマ・核融合学会誌 36, 2 (2002).
[44] 宇佐見 俊介、プラズマ・核融合学会誌 96, 290 (2020).
[45] 須鎗 弘樹、複雑系のための基礎数理―べき乗則とツァリスエントロピーの数理, 牧野書店 (2010).
[46] 四辻 哲章、計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法、プレアデス出版, ISBN:4903814351 (2010).