

相対論的プラズマ粒子シミュレーションのための粒子計算アルゴリズム・追加編
**Numerical methods for charged particles in relativistic particle-in-cell simulation:
additions**

銭谷誠司 (Seiji Zenitani)^{1, 2}

¹⁾ オーストリア科学アカデミー 宇宙科学研究所

²⁾ *Space Research Institute, Austrian Academy of Sciences, Schmiedlstraße 6,
8042 Graz, AUSTRIA^{a)}*

(Dated: 27 June 2025)

本稿は、銭谷・加藤¹⁴ (<http://hdl.handle.net/2433/235378>) の5章「粒子計算アルゴリズム」をフォローアップする記事である。その後に発表された Zenitani–Umeda 法¹²、Multiple Boris 法¹³、Higuera–Carey 法をそれぞれ紹介し、簡単なベンチマーク結果を示す。

Keywords: プラズマ粒子シミュレーション, Zenitani–Umeda 法, Multiple Boris 法, Higuera–Carey 法, ロドリゲスパラメータ

^{a)} Electronic mail: seiji.zenitani@oeaw.ac.at

I. 粒子計算アルゴリズム

PIC シミュレーションでは多くの場合、離散化した粒子の位置・速度を leap-frog 方式で解く。

$$\frac{\mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t}{\Delta t} = \mathbf{v}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \quad (1)$$

$$m \frac{\mathbf{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \mathbf{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}}{\Delta t} = q \left(\mathbf{E}^t + \mathbf{v}^t \times \mathbf{B}^t \right) \quad (2)$$

ここで、上付き添字 ($t, t + \Delta t, \dots$) は時間ステップを意味している。電磁場は、粒子の位置 $\mathbf{x}^t$ に基づいて補完する。そして、粒子加速部 ((2) 式) を解くためにさまざまな解法が提案されている。文献 14 では Boris 法と Vay 法を紹介した。本稿ではそれに加えて、Zenitani & Umeda¹² 法、Multiple Boris 法¹³、Higuera & Cary³ 法を紹介する。

A. Zenitani–Umeda 法

Zenitani & Umeda¹² 法は、運動方程式を Boris 法と同様に時間分割したうえで、中段のローレンツ力の部分で回転公式 (Euler–Rodrigues 公式) を使う方法である。

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (3)$$

$$\theta \equiv \frac{qB}{m\gamma^-} \Delta t, \quad \mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u}^- \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{b}} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}_{\parallel} + (\mathbf{u}^- - \mathbf{u}_{\parallel}) \cos \theta + (\mathbf{u}^- \times \hat{\mathbf{b}}) \sin \theta \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \mathbf{u}^+ + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ は磁場方向の単位ベクトルである。

この方法は物理的に明快であるうえ、 $\mathbf{B} = 0$ の例外処理さえ注意すれば安定動作する。三角関数を呼び出しているため、Boris 法より少し計算が重くなる。そもそも多くの古典的数値解法は、計算コストの高い三角関数を避けて開発されてきた。しかし、これらの解法が開発された当時と比べて、現代では三角関数の計算コストは (相対的に) 下がっている。多少の計算負荷で誤差を一掃できるなら数学関数を使ってしまおう、というのがこの方法の背景思想である。

地球のダイポール磁場の中では磁場がゼロにならないため、 $\mathbf{B} = 0$ の例外処理も省略できる。ジャイロ回転の位相も正確に解けるので、この方法は内部磁気圏の波動粒子相互作用問題に最適ではないだろうか。

B. Multiple Boris 法

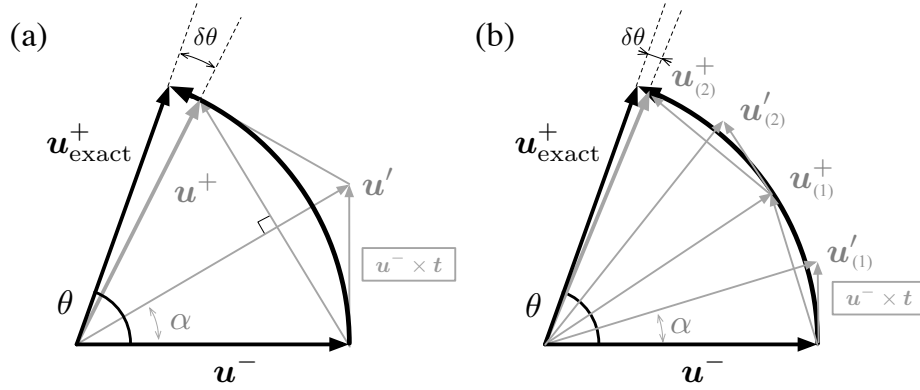


FIG. 1. (a) Boris 法と (b) multiple Boris 法 ($n = 2$)

Multiple Boris 法¹³ は、Boris 法の中段のジャイロ回転部分の近似を n 回繰り返す方法である。もとは梅田^{9,10} が提案した「Multi-step Boris 法」を、著者ら¹³ が任意の n に対して一般化したものである。 $n = 2$ の場合のイメージを図 1 に示す（ちなみにこれは梅田⁹ の「3-step Boris 法」に相当する）。計算手順は以下の通り：

$$\mathbf{t}_n \equiv \frac{q\Delta t}{2nm\gamma^-} \mathbf{B}^t \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}^+ = c_{n1}\mathbf{v}^- + c_{n2}(\mathbf{v}^- \times \mathbf{t}_n) + c_{n3}(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{t}_n)\mathbf{t}_n \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \mathbf{u}^+ + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (10)$$

ここで c_{n1} , c_{n2} , c_{n3} は、第 1 種および第 2 種チェビシェフ級数 $T_n(x)$ 、 $U_n(x)$ を使って以下のように表される係数である。 n は任意の整数、 k は自然数である。

$$c_{n1} = T_n(p_n) \quad (11)$$

$$c_{n2} = \frac{2}{1+t_n^2} U_{n-1}(p_n) \quad (12)$$

$$c_{n3} = \begin{cases} \frac{2}{1+t_n^2} & (\text{for } n = 1) \\ \frac{2}{1+t_n^2} (U_k(p_n) + U_{k-1}(p_n))^2 & (\text{for } n = 2k + 1) \\ \frac{8}{(1+t_n^2)^2} (U_{k-1}(p_n))^2 & (\text{for } n = 2k) \end{cases} \quad (13)$$

$$p_n \equiv \frac{1-t_n^2}{1+t_n^2}. \quad (14)$$

ローレンツ力部分を1回だけ繰り返す $n = 1$ の場合、係数は

$$c_{11} = \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, \quad c_{12} = c_{13} = \frac{2}{1 + t_1^2}, \quad (15)$$

となり、元の Boris 法と等価な結果が得られる。ローレンツ力部分を2回繰り返す $n = 2$ の場合の係数は

$$c_{21} = \frac{1 - 6t_2^2 + t_2^4}{(1 + t_2^2)^2}, \quad c_{22} = \frac{4(1 - t_2^2)}{(1 + t_2^2)^2}, \quad c_{23} = \frac{8}{(1 + t_2^2)^2}, \quad (16)$$

$n = 4$ の係数は以下ようになる。

$$c_{41} = \frac{1 - 28t_4^2 + 70t_4^4 - 28t_4^6 + t_4^8}{(1 + t_4^2)^4}, \quad c_{42} = \frac{8(1 - 7t_4^2 + 7t_4^4 - t_4^6)}{(1 + t_4^2)^4}, \quad c_{43} = \frac{32(1 - t_4^2)^2}{(1 + t_4^2)^4}, \quad (17)$$

この方法は、 $\mathbf{B} = 0$ の例外処理を考慮する必要がないうえ、簡単な計算でジャイロ回転部の精度をあげることができる。また、 $\omega_c \Delta t \approx \pi$ 付近で精度が著しく悪化する問題を（注：どのみち $\omega_c \Delta t \approx \pi$ ではジャイロ回転を十分に分解できなくなる） $\omega_c \Delta t \gtrsim n\pi$ に緩和することができる。

ジャイロ回転角は以下のように近似される。¹³ もとの Boris 法 ($n = 1$) から2段階 ($n = 2$) 以上の Multiple Boris 法に移行すれば、 θ の2次オーダーの誤差を確実に $1/4$ 以下に抑えることができる。

$$\theta \approx 2n \arctan \left(\frac{\theta}{2n} \right) = \theta \left(1 - \frac{1}{12n^2} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \right). \quad (18)$$

余談だが、人工衛星やロボットの姿勢制御問題では、ロドリゲスパラメーター (Rodrigues Parameters; RP) というベクトル

$$\mathbf{t}_1 = \hat{\mathbf{n}} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (19)$$

を使って、回転軸の方向 ($\hat{\mathbf{n}}$) と回転角 (θ) をまとめて表現することがある。^{5,7,15} これを

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = \hat{\mathbf{n}} \sin(\theta/2), \quad q_4 = \cos(\theta/2), \quad (20)$$

の4組にしたものがクォータニオンのベクトル表記である。RP に対応する回転行列（文献7の(202)式、あるいは文献5の(2.139)式）を本稿に合わせた表記で書くと

$$\mathbb{R}_1 = \frac{1}{1 + |\mathbf{t}_1|^2} \left((1 - |\mathbf{t}_1|^2) \mathbb{I} + 2\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1 + 2\mathbb{T}_1 \right) \quad (21)$$

となる。ここで

$$\mathbb{T}_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & t_{n,z} & -t_{n,y} \\ -t_{n,z} & 0 & t_{n,x} \\ t_{n,y} & -t_{n,x} & 0 \end{pmatrix} \equiv -[\mathbf{t}_n \times] \quad (22)$$

はベクトル $\mathbf{t}_n$ に対応する反対称行列で

$$\mathbb{T}_n \mathbf{u} = -\mathbf{t}_n \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{t}_n \quad (23)$$

を満たす。

RP は $\theta = \pm\pi$ で絶対値が無限大に発散し、それ以上の回転を表すことができない。少なくとも $\theta = \pm\pi$ が特異点になる。この制限を回避するために提案されたのが、修正ロドリゲスパラメーター (Modified Rodrigues Parameters; MRP) で

$$\mathbf{t}_2 = \hat{\mathbf{n}} \tan\left(\frac{\theta}{4}\right) \quad (24)$$

対応する回転ベクトル (文献 7 の (255b) 式、あるいは文献 5 の (2.149) 式) は

$$\mathbb{R}_2 = \mathbb{I} + \frac{4(1 - |\mathbf{t}_2|^2)}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbb{T}_2 + \frac{8}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbb{T}_2^2 \quad (25)$$

である。MRP を使うと特異点を $\theta = \pm 2\pi$ に緩和することができる。

PIC の数値解法に話を戻すと、Boris 法 ($n = 1$) および Multi-step/Multiple Boris 法 ($n = 2$) のローレンツ力部は、それぞれ

$$\mathbf{t}_1 \approx \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{t}_2 \approx \frac{\theta}{4} \hat{\mathbf{b}} \quad (26)$$

と近似した RP あるいは MRP に相当する。(21) 式の RP の回転行列は

$$\mathbf{u}^+ = [c_{11}\mathbb{I} + c_{12}\mathbb{T}_1 + c_{13}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1] \mathbf{u}^- = \mathbb{R}_1 \mathbf{u}^- \quad (27)$$

となり、 $n = 1$ のときの (9) 式 + (15) 式に一致する。(25) 式の MRP の回転行列も

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} + \frac{4(1 - |\mathbf{t}_2|^2)}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbb{T}_2 + \frac{8}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} (\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2 - |\mathbf{t}_2|^2\mathbb{I}) \quad (28)$$

$$= \frac{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2 - 8|\mathbf{t}_2|^2}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbb{I} + \frac{4(1 - |\mathbf{t}_2|^2)}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbb{T}_2 + \frac{8}{(1 + |\mathbf{t}_2|^2)^2} \mathbf{t}_2\mathbf{t}_2 \quad (29)$$

$$= c_{21}\mathbb{I} + c_{22}\mathbb{T}_2 + c_{23}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1 \quad (30)$$

となり、 $n = 2$ のときの (9) 式 + (16) 式に一致する。

Multiple Boris 法のパラメーターは任意の n に対して定義できている。(9), (11)–(13) 式は、任意次数の高次ロドリゲスパラメーター⁸ の議論に役立つはずである。

C. Higuera–Cary 法

Higuera & Cary³ 法 (以降、HC 法) は、Vay 法と同様、相対論的なドリフト運動をより正確に解くように設計された解法である。図 2 のような状況を考え、速度ベクトルの中間点を $\mathbf{u}^t (= \frac{1}{2}[\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+])$ とおく。そして、以下の手順で粒子速度を更新する。

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (31)$$

$$\frac{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-}{\Delta t} = \frac{q}{m} (\mathbf{v}^t \times \mathbf{B}^t) \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \mathbf{u}^+ + \frac{q}{m} \mathbf{E}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (33)$$

(31)–(33) 式を足しあわせると

$$\frac{\mathbf{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \mathbf{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}}{\Delta t} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}^t + \mathbf{v}^t \times \mathbf{B}^t) \quad (34)$$

となる。こうすると、粒子がドリフト速度で動く $\mathbf{v}^{t\pm\Delta t/2} = \mathbf{v}^t = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ のとき、(34) 式が厳密にゼロになって力学バランスが成立する。従って、例えば、相対論的流れの系の中で静止している粒子の運動を厳密に解くことができる。

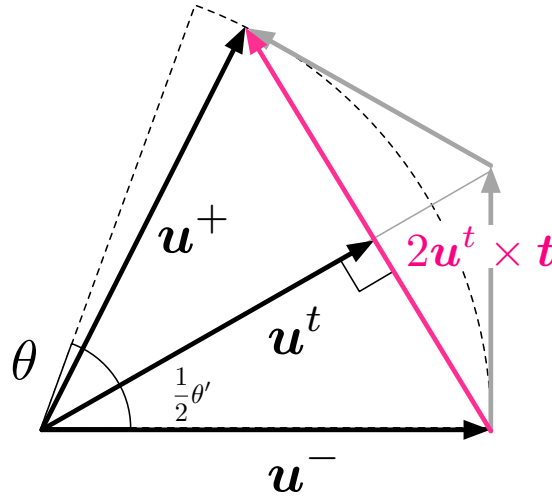


FIG. 2. Higuera–Cary 法のジャイロ回転部の図解。

以下、(32) 式を解くために $\mathbf{u}^-$ から $\mathbf{u}^t$ を計算する手順を導出する。最初に

$$\mathbf{t} \equiv \frac{q\Delta t}{2m\gamma^t} \mathbf{B}^t, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{q\Delta t}{2m} \mathbf{B}^t = \gamma^t \mathbf{t} \quad (35)$$

とおく。次に

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^- + \frac{q\Delta t}{m} \left(\frac{\mathbf{v}^t}{2} \times \mathbf{B}^t \right) = \mathbf{u}^- + \mathbf{u}^t \times \mathbf{t} \quad (36)$$

の陰解法の間係を考えて、 $\cdot \mathbf{t}$ および $\times \mathbf{t}$ を作用させる。

$$\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{t} \quad (37)$$

$$\mathbf{u}^t \times \mathbf{t} = \mathbf{u}^- \times \mathbf{t} + (\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} - t^2 \mathbf{u}^t \quad (38)$$

(37), (38) 式を (36) 式の右辺に代入すると

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^- + \mathbf{u}^- \times \mathbf{t} + (\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} - t^2 \mathbf{u}^t \quad (39)$$

$$\mathbf{u}^t = \frac{1}{1+t^2} \left(\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^- \times \mathbf{t} + (\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \right) \quad (40)$$

となり、(40) 式を二乗すると

$$(1+t^2) \left((\gamma^t)^2 - 1 \right) = \frac{1}{c^2} \left(|\mathbf{u}^-|^2 + (\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{t})^2 \right) \quad (41)$$

となる。 $\mathbf{t} = \gamma^t \boldsymbol{\tau}$ の関係を使って (41) 式を整理すると、 $(\gamma^t)^2$ の二次方程式

$$(\gamma^t)^4 + \left(\tau^2 - \frac{(u^-)^2}{c^2} - 1 \right) (\gamma^t)^2 - \tau^2 - \frac{(\mathbf{u}^- \cdot \boldsymbol{\tau})^2}{c^2} = 0 \quad (42)$$

を得る。ここから

$$\sigma \equiv 1 + (u^-/c)^2 - \tau^2 \quad (43)$$

$$(\gamma^t)^2 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(\tau^2 + (\mathbf{u}^- \cdot \boldsymbol{\tau})^2/c^2)}}{2} \quad (44)$$

が求まる。これは Vay 法のローレンツ因子と同じ形である。(35) および (40) 式より、ジャイロ回転部の計算手順は

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^t + (\mathbf{u}^t - \mathbf{u}^-) \quad (45)$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \left((1-t^2)\mathbf{u}^- + 2\mathbf{u}^- \times \mathbf{t} + 2(\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \right) \quad (46)$$

$$= \frac{1}{(\gamma^t)^2 + \tau^2} \left(((\gamma^t)^2 - \tau^2)\mathbf{u}^- + 2\gamma^t \mathbf{u}^- \times \boldsymbol{\tau} + 2(\mathbf{u}^- \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \right) \quad (47)$$

となる。これは、ローレンツ因子が

$$\gamma_{\text{boris}}^2 = (\gamma^-)^2 = 1 + (\mathbf{u}^-/c)^2 \quad (48)$$

$$\gamma_{\text{hc}}^2 = (\gamma^t)^2 = \text{Eq. (44)} \quad (49)$$

であるところを除いて、Boris 法の手順と同じである。ローレンツ因子 ((48), (49) 式) が 1 になる非相対論では、HC 法と Boris 法は一致する。

図 2 からわかるように、HC 法の間点 $\mathbf{u}^t$ は、Boris 法の間点 $\mathbf{u}^-$, $\mathbf{u}^+$ よりも原点に近い。すなわち、中間点のローレンツ因子 γ^t は、 γ^- よりも小さく、 $\gamma^t \leq \gamma^-$ であることがわかる。そのときの回転角 θ_{hc} は Boris 法の回転角 θ_{Boris} より大きくなる。実際の θ_{Boris} が (18) 式に $n = 1$ を代入した

$$\theta_{\text{Boris}} = \theta \left(1 - \frac{1}{12}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \right). \quad (50)$$

であるのに対して、HC 法の回転角は

$$\theta_{\text{hc}} \approx 2 \arctan \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\text{hc}}} \cdot \frac{\theta}{2} \right) = \theta \left(1 + \left[\frac{v_{\perp}^2}{8c^2} - \frac{1}{12} \right] \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \geq \theta_{\text{Boris}} \quad (51)$$

である。³

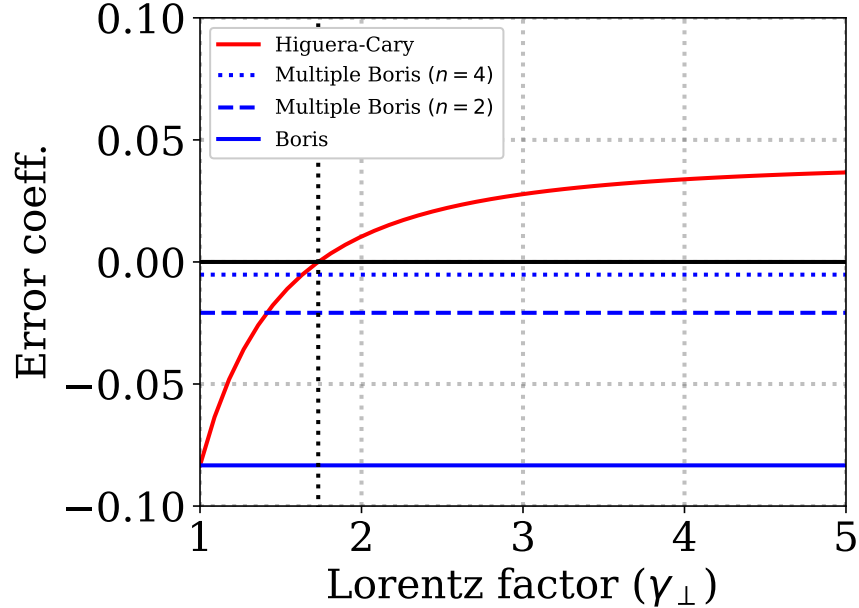


FIG. 3. 各解法のジャイロ回転角の誤差。

HC 法を含め、いくつかの数値解法の回転角の 2 次の誤差を図 3 に示す。縦軸は 2 次の誤差の係数 ((51) 式、(18) 式) で、横軸は $v_{\perp}$ のローレンツ因子 $\gamma_{\perp} = \sqrt{1 - (v_{\perp}/c)^2}$ である。実は $E > 0$ で相対論的なドリフト運動を考えると話が難しくなるが、この角度がジャイロ回転運動の回転角としての意味を持つ $E \approx 0$ の範囲では、 $v_{\perp}$ に応じてジャイロ回転角が変化

することがわかる。 $v_{\perp} \approx 0$ であれば Boris 法と同様に位相が遅れ、 $v_{\perp} \approx \sqrt{2/3}c$ ($\gamma_{\perp} \approx \sqrt{3}$) では比較的正確になり、 $v_{\perp} > \sqrt{2/3}c$ ($\gamma_{\perp} > \sqrt{3}$) であれば、本来よりも速くジャイロ回転する。

HC 法は、Vay 法と同様、相対論的流れ中の力学バランスを保持しやすい性質を持っている。さらに、HC 法は 6 次元の位相空間中の体積を保存する性質⁶ を持っており、長期計算の安定性もある程度保証されている。対して、Vay 法では、位相空間中の体積保存は（長期的・平均的には保存しているかもしれないが）保証されていない。また、HC 法は、 u^- のローレンツ因子 γ^- を計算に使わないなど、Vay 法より平方根演算が少なく済み、その他全体の計算量も少なく済み。個人的には、お薦めしたい解法の 1 つである。

D. ベンチマーク結果

それぞれの数値解法の性能を測るため、テスト粒子コードを使って、簡単なベンチマークテストを行なった。一様の磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ 、 $\mathbf{E} = 0$ の中で、相対論的な速度を持つ粒子 $\mathbf{u}|_{t=0} = (1, 0, 0)$ のジャイロ回転を長期間計算し、プログラムの実行時間を計測した。実行時間はさまざまな要素に左右されるが、CPU アーキテクチャの違いが特に大きく影響するため、Intel プロセッサと SPARC プロセッサの 2 種類の環境を用意してテストを行なった。4 種類の数値解法のうち、Boris 法のジャイロ回転部分は古典的な 2-step の方法と 1-step 表記 ((9) + (15) 式) の 2 通りを評価した。そして、6 回 (Intel) あるいは 3 回 (SPARC) 計測した実行時間を平均し、2-step Boris 法の数値を基準にして規格化して評価した。ここで計測した時間は、粒子の加速運動に加えて、位置の更新など、プログラムの全要素を計算する時間である。（注：このベンチマークは、もともと文献 14 に含めるつもりで計測したもので、2019 年 [2020 年] の multiple Boris 法の数値は含まれていない）

テスト結果を図 4 に示す。本稿では精度については議論しないが、最も簡単な Boris 法コードが最も高速に動作していることがわかる。興味深いことに、Boris 法も実装 (2-step vs 1-step) に応じて、プロセッサ毎に性能が違っている。経験的に SPARC などの RISC 系プロセッサで 1-step 表記は高速に動作する。三角関数を多用する Zenitani & Umeda¹² 法 (Exact と表記) も現代の CPU では十分高速に動作している。陰解法を解く Vay 法、HC 法は、若干計算時間がかかっている。先に述べた理由で、Vay 法より HC 法の方が高速である。

実際の PIC シミュレーションでは、粒子解法部分および、粒子の移動結果を集めて電流を計算する部分で計算時間がかかっている。さらに、メモリアクセスなどの別の要素もあるわけだが、粒子解法部分の性能と精度は PIC シミュレーション全体の性能に大きく影響す

る。効率的かつ高精度の数値解法を選択することは良いシミュレーション研究を進めるために重要である。

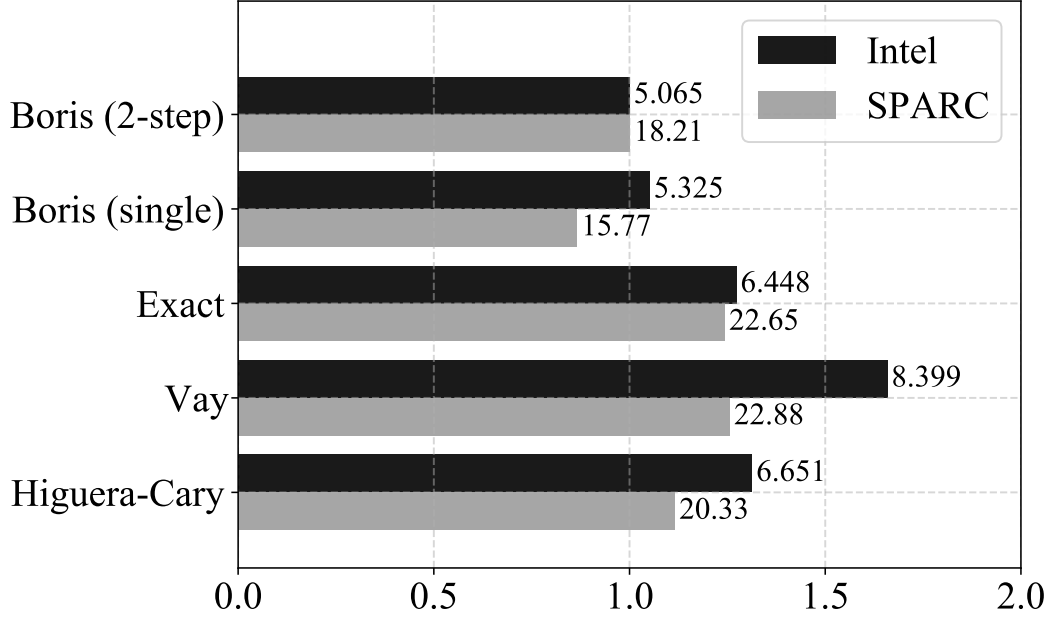


FIG. 4. 各数値解法のベンチマーク結果。横軸は、長期間のジャイロ回転問題の計算時間を 2-step Boris 法の結果で規格化したもので、バーが短いほど高速である。

II. 謝辞

本研究は、科学研究費助成事業若手研究 (B) 25871054 および基盤研究 (C) 17K05673 の支援を受けて行われたものである。

REFERENCES

- ¹Birdsall, C. K. and Langdon, A. B., *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill, New York (1985).
- ²Boris, J. P., *Relativistic Plasma Simulation—Optimization of a Hybrid Code*, in Proceedings of 4th Conference on Numerical Simulation of Plasmas, Naval Research Laboratory, Washington D. C., pp. 3–67 (1970).

- ³Higuera, A. V. and Cary, J. R., *Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields*, Phys. Plasmas **24**, 052104 (2017).
- ⁴Hockney, R. W. and Eastwood, J. W., *Computer simulation using particles*, McGraw-Hill, New York (1981).
- ⁵Markley, F. L. and Crassidis, J. L., *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, Springer, New York (2014).
- ⁶Qin, H., S. Zhang, J. Xiao, J. Liu, Y. Sun, W. M. Tang, *Why is Boris algorithm so good?*, Phys. Plasmas **20**, 084503 (2013).
- ⁷Shuster, M. D., *A survey of attitude representations.*, J. Astronaut. Sci. **41**, 439–517 (1993).
- ⁸Tsiotras, P., Junkins, J. L., and Hanspeter, S., *Higher Order Cayley Transforms with Applications to Attitude Representations*, J. Guid. Control Dyn. **20**, 528–536 (1997)
- ⁹Umeda, T., *A three-step Boris integrator for Lorentz force equation of charged particles*, Comput. Phys. Commun. **228**, 1 (2018).
- ¹⁰Umeda, T., *A multi-step Boris integrator for Lorentz force equation of charged particles*, Comput. Phys. Commun. **237**, 37 (2019).
- ¹¹Vay, J. L., *Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity*, Phys. Plasmas **15**, 056701 (2008).
- ¹²Zenitani, S. and Umeda, T., *On the Boris solver in particle-in-cell simulation*, Phys. Plasmas **25**, 112110 (2018).
- ¹³Zenitani, S. and Kato, T. N., *Multiple Boris integrators for particle-in-cell simulation*, Comput. Phys. Commun. **247**, 106954 (2020).
- ¹⁴銭谷誠司、加藤恒彦、*相対論的プラズマ粒子シミュレーションのための粒子計算アルゴリズム*、生存圏研究, 14, pp. 62–77, <http://hdl.handle.net/2433/235378> (2018)
- ¹⁵狼 嘉彰、富田信之、中須賀真一、松永三郎、*宇宙ステーション入門*、東京大学出版会、第6章 (2002)