Magnetic Reconnection : MHD and Single Particle Theories

Keizo Fujimoto

MPEWG September 10, 2002

Department of Geophysics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1 Introduction

1.1 Significance of the magnetic reconnection

まずはじめに、磁気再結合がなぜ起こり得るのか、そしてそれがなぜ重要なのかについて述べる。いま、簡単化されたオームの法則、

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} \tag{1}$$

に従うプラズマを考える。(1) 式の $\boldsymbol{E}$ を Faraday の法則に代入して変位電流を無視した Ampère の法則を用いると、磁場 $\boldsymbol{B}$ の時間変化を記述する誘導方程式が導ける。

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{2}$$

磁場の振る舞いは (2) 式の左辺においてどちらの項が卓越するかに依存する。そこで、各項が物理的にどのような効果を表しているのかを考える。第 1 項目はプラズマの運動にともなう場の対流を表している。すなわち、第 1 項が第 2 項に比べて卓越している ($\sigma \to \infty$) 場合、プラズマは磁力線に“ 凍結 ”され、初期状態においてある磁力線上にあった流体要素はその後も同じ磁力線上にありつづける。

一方、第 2 項目が卓越する場合 (2) 式は拡散方程式になり、磁場の勾配が小さくなるように磁場が拡散される。このとき、磁場のエネルギーはジュール加熱によりプラズマのエネルギーに変換される。

(2) 式の右辺の 2 項の比は磁気レイノルズ数 R_m というかたちで集約される。

$$R_m \equiv \mu_0 \sigma v L \approx \frac{|\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})|}{|\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \boldsymbol{B}|} \tag{3}$$

ここで、v は特徴的な流れの速度で L は系に特徴的な長さである。R_m が大きければ対流効果が卓越し、小さければ拡散効果が卓越する。一般的に、宇宙プラズマ系では R_m の値は非常に大きい。たとえば、太陽フレアでは $R_m \sim 10^8$、太陽風中や地球磁気圏では $R_m \geq 10^{11}$ である。R_m がこのように大きな値をとるのは、(3) 式で系に特徴的な長さ L が非常に大きく、太陽フレアでは $L \sim 10^4$ km、太陽風中では $L \sim R_\odot$、そして地球磁気圏では cavity 程度となっているからである。したがって、これらの空間スケールの磁場に対しては対流効果が圧倒的に支配的となり、拡散効果は無視できる（つまり $\sigma \to \infty$ と考えてよい）。このとき、プラズマは強く磁力線に束縛されて、異なる領域を起源とするプラズマがお互いに混ざり合うことが許されない。

ところが、2 つの分け隔てられたプラズマ領域が接するとそこに薄い境界層ができる。一般的に、境界層を境にして磁場が不連続であるので電流層ができる。電流層における特性長はそれを挟むプラズマ領域の特性長に比べてずっと小さいので、ここでは磁場の拡散効果を無視できなくなり、異なる領域を起源とするプラズマ間で運動量やエネルギーの交換が可能になる。磁場の拡散効果によって磁場の融合 (merging) がおこり、磁気再結合 (magnetic reconnection) が可能となる。
磁気再結合の理解は以下の 2 つの理由によって重要である。

1. 磁力線のトポロジカルな変化がわかる。
2. 磁気エネルギーからプラズマエネルギーへの変換が可能であるので、太陽フレアや磁気圏サブストームに伴う大規模なエネルギー開放を説明できることが期待される。

1.2 Definitions of Several Terms

ここでは、以下の議論のために磁気再結合に関連するいくつかの言葉の定義をする (Sonnerup, 1979)。

[セパラトリクス (a separatrix)]

異なるトポロジカルな領域に属する磁力線を分ける平面。セパラトリクスはあらゆるところで磁力線に接している。

[セパレータ (a separator)]

2 つのセパラトリクスが交わる直線、もしくは、1 つのセパラトリクスがそれ自身と交わる直線。セパラトリクスは、再結合線 (reconnection line)、融合線 (merging line)、X 型線 (X line) とも呼ばれる。"中性線 (neutral line)"という呼び名は一般的にはふさわしくない。なぜなら、"中性線"に沿ってほぼ一様な磁場が存在してもよいからである (Cowley, 1985)。

[拡散領域 (the diffusion region)]

セパラトリクスに囲まれたプラズマ管 (plasma channel)。この中では、衝突過程や乱流もしくは慣性効果による抵抗拡散が重要となる。

[磁力線再結合 (magnetic-field reconnection)]

磁力線再結合は、電場成分 (誘導電場もしくは静電場) がセパレータもしくはそのマクロ領域に沿って存在しているときに起きる。なお磁力線消失 (magnetic-field annihilation) という言葉は、セパラトリクスが縮退して 2 つの領域を隔てる平面になっている場合に使われる。磁力線融合 (magnetic-field merging) という語は再結合と消失の両方を指す。

[局所的かつ瞬間的な再結合率 (the local instantaneous reconnection rate)]

セパレータに沿った電場成分の瞬間的な大きさによって決められる。

1.3 Historical Review

磁気再結合モデルの発展には 2 つの大きな流れがある。1 つは Sweet-Parker から Petschek、Sonnerup へと続く電磁流体モデルであり、もう 1 つは Speiser から Dessler-Alfvén、Cowley へと続く単一粒子モデルである。この節では Vasyliunas (1975) に従って、磁気再結合モデルの発展の歴史を簡潔にまとめる。以下の参考文献（**太字**のもの）はすべて Vasyliunas (1975) で引用されているので、そちらを参考にしてください。

[**電磁流体モデル**]

- **Geovanelli (1947, 1948)** and **Hoyle (1949)**
  太陽フレアやオーロラに関係する電荷粒子が X 型磁気中性点で加速されることが示唆され、磁力線再結合の研究がはじまる。

- **Dungey (1953)**
  2 次元平面における X 型磁気中性線近傍のプラズマの力学的な運動を研究し、はじめ垂直に交わっていたセパラトリクスが互いに接近し、薄い磁場反転領域を形成することを発見した。この形は後に研究されるほとんどの再結合過程に関する理論の原型となる。

- **Sweet (1958)** and **Parker (1957, 1963)**
  セパラトリクス下流域における弱い磁場を完全に無視し ($\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0$)、プラズマ流を field-free に流す。この過程は磁力線の再結合というよりは消滅を描写するものである。Sweet and Parker によって計算された融合率 (merging rate) は系の広がりとプラズマの抵抗率に依存し、太陽フレアや地球磁気圏において観測されているエネルギー散逸を説明するには小さすぎる。

- **Petschek (1964)**
  セパラトリクス下流域の磁場は、極小さな領域を除いて無視してはならないと考えた。磁気流体波の特性を利用することで、融合率 ($= v_i/V_A$) が 0 からある有限な値までのどの値でも可能なモデルを作る。Petschek のモデルでは最大融合率は 0.1 のオーダーである。

- **Sonnerup (1970)** and **Yeh and Axford (1970)**
  系の大きさを限定することにより支配方程式を簡単化し厳密解を得た。このモデルでは、最大融合率は 1 のオーダーである。

[**単一粒子モデル**]

- **Speiser (1965)**
  磁場反転領域における荷電粒子の運動を考察し、磁場融合問題に応用した。

この後、**Dessler (1968)** と **Alfvén (1968)** によって独立にモデルが作られ、**Cowley (1973)** によって改良される。

本稿では、電磁流体モデル（Sweet-Parker, Petschek, and Sonnerup）と単一粒子モデル（Speiser）について説明し、両者によって記述される描像が巨視的には良く類似していることを示す。なお、電磁流体モデルに関しては Vasyliunas (1975)、単一粒子モデルに関しては Speiser（1965）と Cowley (1985) を参考にした。

1.4 Application of the Generalized Ohm's Law

磁気拡散領域では対流電場 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は小さくなるため、この周辺における電場を正しく扱うためには、一般化されたオームの法則を適用する必要がある。電子とイオン（陽子）からなるプラズマに対する一般化されたオームの法則は次のようにかける。

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{j}+\frac{m_e}{ne^2}\left[\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\boldsymbol{j})\right]-\frac{1}{ne}\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e+\frac{1}{ne}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{4}$$

ここで、m_e は電子の質量（m_i はイオンの質量、$m_e/m_i<<1$ を仮定)、$n\,(=n_e\simeq n_i)$ は電子もしくはイオンの数密度、$\boldsymbol{P}_e$ は電子の圧力テンソル、η は電気抵抗率。

一般化されたオームの法則の右辺を無視できるかどうかは、右辺の各項と左辺の大きさをそれぞれ比較することによって決められる。このとき、Faraday の法則を使うと $|\boldsymbol{E}|\approx VB$ となることを利用する。

右辺第 1 項、

$$\frac{|\eta\boldsymbol{j}|}{|\boldsymbol{E}|}=\frac{|\frac{\eta}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{E}|}\approx\frac{\eta}{\mu_0}\frac{B/L}{VB}=\frac{V_A}{V}\frac{\lambda_\eta}{L}$$

ここで、$\lambda_\eta=\eta/\mu_0V_A$ は拡散長、L と V はそれぞれ系に特徴的な長さ（空間変化のスケール）と特徴的な速さ、$V_A=B/\sqrt{\mu_0nm_i}$ はアルベン速度。

右辺第 2 項（第 3 項、第 4 項も同じ)、

$$\frac{|\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}|}{|\boldsymbol{E}|}=\frac{|\frac{m_e}{\mu_0ne^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})|}{|\boldsymbol{E}|}\approx\lambda_e^2\frac{(V/L)(B/L)}{VB}=\left(\frac{\lambda_e}{L}\right)^2$$

ここで、$\lambda_e=c/\omega_{pe}$ は電子の慣性長、$\omega_{pe}=\sqrt{ne^2/\varepsilon_0m_e}$ は電子のプラズマ振動数。

第 5 項、

$$\frac{|\frac{1}{ne}\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e|}{|\boldsymbol{E}|}\approx\frac{(1/ne)(nm_ev_e^2/L)}{VB}=\frac{v_e}{V}\frac{\lambda_{Le}}{L}$$

ここで、$\lambda_{Le}=v_e/\omega_{ce}$ は電子のラーマー半径、v_e は電子の熱速度、$\omega_{ce}=eB/m_e$ は電子のラーマー周波数。

第 6 項、

$$\frac{|\frac{1}{ne}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{E}|}=\frac{|\frac{1}{\mu_0ne}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{E}|}\approx\frac{1}{\mu_0ne}\frac{B^2/L}{VB}=\frac{V_A}{V}\frac{\lambda_i}{L}$$

ここで、$\lambda_i=c/\omega_{pi}$ はイオンの慣性長、$\omega_{pi}=\sqrt{ne^2/\varepsilon_0m_i}$ はイオンのプラズマ振動数。

以上から、(4) 式右辺の各項に関連する特性長は、第 1 項が拡散長（λ_η)、第 2 項、第 3 項それに第 4 項が電子の慣性長（λ_e)、第 5 項が電子のラーマー半径（λ_{Le})、第 6 項がイオンの慣性長（λ_i）であり、これらが空間変化のスケール L に比べて十分小さければ、その項は省略可能となる。

2 MHD Models of Reconnection

2.1 Sweet-Parker Model

[仮定]

- プラズマの加速は磁気拡散領域内でのみ行う。
- 磁気拡散領域内では対流電場 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を無視する。
- 磁場 $\boldsymbol{B}$ は y 成分をもたない。
- あらゆる物理量は y に依存しない（$\partial/\partial y = 0$）。
- 電流 $\boldsymbol{j}$ は y 成分のみをもつ（ホール電流を無視）。
- E_y は一定値 E である（$\partial/\partial t = 0$）。

[一般化されたオームの法則]

磁気拡散領域の幅の半分の値を z^*、長さの半分の値を x^* として、（4）式を磁気拡散領域の 1/4 の部分にわたって積分する。y 成分のみを考えると、

$$\int_0^{z^*}\int_0^{x^*} E\,dzdx = \eta\int_0^{z^*}\int_0^{x^*} j\,dzdx + \frac{m_e}{ne^2}\int_0^{z^*}\int_0^{x^*}[\nabla\cdot(\boldsymbol{jv}+\boldsymbol{vj})]_y\,dzdx - \frac{1}{ne}\int_0^{z^*}\int_0^{x^*}(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e)_y\,dzdx \tag{5}$$

一般化されたオームの法則 (4) 式において左辺第 2 項は仮定により無視した。また、右辺第 2 項は定常状態を仮定することにより無視した。さらに、右辺第 6 項（ホール項）は y 成分をもたないので (5) 式にはあらわれない。(5) 式の各項は、

$$\int_0^{z^*}\int_0^{x^*}\nabla\cdot(\boldsymbol{jv})\,dzdx = \int_s d\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{jv}) = \int_s \underbrace{(d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j})}_{=0}\boldsymbol{v} = 0$$

ここで、s は積分面の縁を表し、$d\boldsymbol{s}$ は大きさが ds で向きが s に垂直なベクトル要素である。同様に、

$$\int_0^{z^*}\int_0^{x^*}\nabla\cdot(\boldsymbol{vj})\,dzdx = \int_s d\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{vj}) = \int_s(d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{j} = \int_0^{z^*}(v_x\boldsymbol{j})_{x=x^*}dz + \int_0^{x^*}\underbrace{(v_z\boldsymbol{j})_{z=z^*}}_{=0}dx$$

最後の項が 0 となるのは $\boldsymbol{j}(z^*) = 0$ のためである。また、対称性から $v_x(x=0) = 0$、$v_z(z=0) = 0$ とした。

$$\int_0^{z^*}\int_0^{x^*}(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e)_y\,dzdx = \left(\int_s d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{P}_e\right)_y = \int_0^{z^*}(P_{exy})_{x=x^*}dz + \int_0^{x^*}\underbrace{(P_{ezy})_{z=z^*}}_{=0}dx = P_{exy}(x^*)\,z^*$$

最後から 2 つ目の項が 0 となるのは、$x = x^*$ では圧力テンソルが磁力線に対して対称となるためである。

以上から (5) 式は、

$$Ex^*z^* = \eta\int_0^{z^*}\int_0^{x^*} j\,dzdx + \frac{m_e}{ne^2}v_x(x^*)\int_0^{z^*} j(x^*)\,dz - \frac{z^*}{ne}P_{exy}(x^*) \tag{6}$$

となる。

一方、アンペールの法則を上と同じ積分領域で積分し、y 成分だけ取り出すと、

$$\mu_0 \int_0^{z^*} \int_0^{x^*} j\, dzdx = B_x(z^*)x^* - B_z(x^*)z^* \simeq Bx^* \tag{7}$$

ここで、$B = B_x(x^*)$、$B_z << B$ とした。

また、非圧縮流体を仮定すれば質量保存則から、

$$\underbrace{Vx^*}_{in} = \underbrace{v_x z^*}_{out} \tag{8}$$

V は磁気拡散領域に流入するプラズマの速さ。

さらに、磁気拡散領域の外部でオームの法則を適応すると、

$$E = VB \tag{9}$$

(6)〜(9) 式から、

$$z^{*^2} - \lambda z^* - \lambda_e^2 + \frac{z^*}{nev_x(x^*)} \frac{P_{exy}(x^*)}{B} = 0 \tag{10}$$

ここで、$\lambda = \eta/\mu_0 V$、λ_e は電子の慣性長。

[P_{exy} **の見積もり**]

磁気中性線上では $v_x = 0$, $v_z = 0$ であるから、$\eta = 0$ とすればオームの法則 (4) の y 成分は、

$$E = -\frac{1}{ne}\left(\frac{\partial P_{exy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ezy}}{\partial z}\right) \tag{11}$$

右辺の第 1 項と第 2 項が同じオーダーであると考えると、大雑把にどちらか 1 項を無視して、

$$\frac{\partial P_{exy}}{\partial x} \approx -neE \tag{12}$$

と近似できる。磁気中性線では $P_{exy} = 0$ として、

$$P_{exy}(x) \approx -neEx\,, \quad x << x^* \tag{13}$$

さて、磁気中性線から離れるにつれて、B_z が大きくなるため電子の回転運動により磁力線まわりの非等方性が無くなる。そして磁気拡散領域の外部では $P_{exy} \to 0$ になる。そこで、

$$P_{exy}(x^*) \approx -\xi neEx^*\,, \quad \xi < 1 \tag{14}$$

のように表現する。(8)、(9)、(14) から、

$$\frac{z^*}{nev_x(x^*)} \frac{P_{exy}(x^*)}{B} \simeq -\xi z^{*^2} \tag{15}$$

(15) を (10) に代入すると、(10) の左辺の第 1 項の係数が 1 から $(1-\xi)$ にかわる。この変化は無視できると考えて、(10) における圧力項を無視する。すると、

$$z^{*^2} - \lambda z^* - \lambda_e^2 \quad = 0 \tag{16}$$

これを解いて、

$$z^* = \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda_e^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

を得る。

[磁気拡散領域の幅 z^*]

(17) 式において 2 つの極限を考える。

i) 抵抗率が大きいとき ($\lambda >> \lambda_e$)

$$z^* \simeq \lambda \tag{18}$$

磁場が中性線領域において拡散していく割合と、プラズマ流によって磁力線が移流してきて磁場が強められる割合が、λ という幅でつりあっていることを意味する。

ii) 抵抗率が小さいとき ($\lambda << \lambda_e$)

$$z^* \simeq \lambda_e \tag{19}$$

プラズマ同士の (実効的な) 衝突時間によって定義される抵抗率 (η) を、プラズマが磁気拡散領域に滞在する時間によって定義される慣性抵抗率 ($m_e V/ne^2 z^*$) で置き換えて考えると、物理的描像は i) に帰着される。

Sweet-Parker モデルでは、オームの法則で電子の慣性効果を無視していたので i) の結果しか得られなかったが、慣性効果を考慮することで $z^* > \lambda_e$ となり、より大きな拡散領域の幅が得られた。

[融合率]

(8) と (16) から、

$$\frac{V}{v_x} = \left(\frac{\lambda^*}{x^*} + \frac{\lambda_e^2}{{x^*}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda^* = \frac{\eta}{\mu_0 v_x} \tag{20}$$

ここで、$v_x = V_A = B/\sqrt{\mu_0 n m_i}$（あとで証明する)、$x^* = L$ とすると、

$$\frac{V}{V_A} = M_A = \left(\frac{\lambda_\eta}{L} + \frac{\lambda_e^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

つまり抵抗率が大きいときは、

$$M_A \simeq \left(\frac{\lambda_\eta}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

抵抗率が小さいときは、

$$M_A \simeq \frac{\lambda_e}{L}$$

となる。

[融合率の上限]

磁気拡散領域のすぐ外側 ($|x| \geq x^*$) では、$E = v_x(x^*) B_z$ が成り立つ。これと (9) 式から、$B_z/B \approx V/v_x(x^*)$。(8) を使って (7) 式を変形すると、

$$\mu_0 \int j \, dz \approx B \left(1 - \frac{V^2}{v_x^2} \right) \tag{22}$$

磁気再結合が磁気エネルギーのプラズマエネルギーへの変換過程であることを考えると、$\int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} dz > 0$ でなければならない。$\boldsymbol{E}$ は空間的に一様であるから、$\int j \, dz > 0$、つまり $V < v_x$ でなければならない。このことから、磁場拡散領域に流入するプラズマの速度は、そこから流出する速度を超えることはできない。

2.2 Petschek Model

[Overview]

磁場反転領域では磁場が弱くなる。Sweet-Parker モデルでは、磁場の減少を有限抵抗による磁場の拡散効果によって説明した。その結果、融合率が非常に小さくなってしまった。Petschek モデルでは、磁場を弱くする手段として、磁場の拡散だけではなく遅進衝撃波（slow shock）による磁力線の屈折を利用し、現実的な融合率を実現した。

遅進波（slow mode wave）は磁力線に垂直な方向には伝播できないため、遅進衝撃波が存在できるためには、磁場が衝撃波面に垂直な成分 B_n を持たなければならない。しかし、磁気中性線近傍では B_n がなくなるため遅進波は上流に伝播できず衝撃波が形成されない。そのため、磁気中性線近傍には磁気拡散領域が残る。

Petschekモデルでは、系の端 $x \approx L$（Lは系の長さ）では磁気反転領域を除いて磁場が一定（$B_0 = const.$）としている。衝撃波面に垂直方向に磁場成分を持つように磁力線を曲げると、磁気拡散領域のすぐ外側（$x = 0, |z| \approx z^*$）における磁場 B_d は B_0 よりも小さくなる。

前節の議論より、磁気拡散領域のすぐ外側におけるアルベンマッハ数 $M_A = V/V_A$ は 1 を超えることができない。一方、融合率は慣例的に磁気拡散領域からはるか遠くのアルベンマッハ数で定義される。Petschek モデルの場合、$B_d < B_0$ でかつ V は磁気拡散領域に近づくにつれて大きくなるので（$E = VB = const.$ のため）、融合率は自ずと 1 より小さくなることが予期される。

以下では、磁場反転領域の内部（すべてが磁気拡散領域というわけではない）と外部に分けて議論を進める。

[Mathematical Development（磁場反転領域の内部）]

磁気中性線を原点にとり、$0 \le x' \le x$、$0 \le z \le Z(x')$ であらわされる領域を考え、この面内で方程式系を積分する。このとき、以下の仮定を行う。

- すべての物理量を融合率（merging rate）の最低次で見積もる。
- $\frac{dZ(x)}{dx}$ は（高々）1 次のオーダーである。
- すべての物理量は BC 面で一定である（AB 面では一定ではない）。

非圧縮流体を考えると質量保存則から、

$$-\int_A^B d\boldsymbol{l} \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \boldsymbol{v}) = v_x(x)Z(x) \tag{23}$$

いま、速度の最低次は (52) より $z > 0$ で $\boldsymbol{v}_1 = -v_1\hat{\boldsymbol{e}}_z$ とかくことにすると上式は、

$$v_1 x = v_x(x)Z(x) \tag{24}$$

となる。

次に、一般化されたオームの法則 (4) の y 成分を（対流電場の項も含めて）積分すると、

$$E\int_0^x dx'\, Z(x') + \int_0^x dx' \int_0^{Z(x')} dz\, \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \eta \int_0^x dx' \int_0^{Z(x')} dz\, j + \frac{m_e}{ne^2} v_x(x) \int_0^{Z(x')} dz\, j - \frac{Z(x)}{ne} P_{exy}(x) \tag{25}$$

この各項を評価する。

圧力勾配項

- 磁気拡散領域の外部では、磁力線に対して軸対称なため $P_{exy} = 0$。
- 磁気拡散領域の内部では、(14) 式あたりの議論から無視できる。

j を含む項

アンペールの法則から j の 1 次のオーダーを見積もると、

$$\mu_0 \int_0^x dx' \int_0^{Z(x')} dz\, j = \oint_{ABCD} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{B} = \int_A^B d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{B} - Z(x) B_z(x) \approx \int_0^x dx'\, B_0 - Z(x) B_z(x) \approx B_0 x \tag{26}$$

磁気拡散領域の外部では $Z(x) << x$ を仮定した。また、$B_z << B_0$ とした。さらに、x について積分すると、

$$\mu_0 \int_0^{Z(x)} dz\, j \approx B_0 \tag{27}$$

となる。

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を含む項

磁場 $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ であらわす。また、非圧縮 2 次元流を考えているので $\boldsymbol{v}$ は流れの関数 Ψ であらわすことができる。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \hat{\boldsymbol{e}}_y A = -\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \nabla A$$

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \hat{\boldsymbol{e}}_y \Psi = -\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \nabla \Psi$$

すると、

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \nabla \Psi \times \nabla A = \nabla \times (\Psi \nabla A) \tag{28}$$

ここで、ストークスの定理を適用すると、

$$\int_0^x dx' \int_0^{Z(x')} dz\, \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \oint d\boldsymbol{l} \cdot (\Psi \nabla A) = -\int_0^x dx'\, [B_z v_1 x']_{z=Z(x')} - \int_0^{Z(x)} dz\, [B_x v_x z]_{x=x} \tag{29}$$

上の計算では、対称性から $v_x(x=0) = 0$、$v_z(z=0) = 0$ を仮定した。磁場反転領域では $\boldsymbol{B}$ がおおよそ z には依存しないとすると、$B_x \approx 0$ となり、

$$\int_0^x dx' \int_0^{Z(x')} dz\, \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \approx -v_1 \int_0^x dx'\, B_z x' \tag{30}$$

を得る。

E を含む項

$$E = v_1 B_0$$

以上を (25) 式に代入して、(24) の関係を用いると、

$$\frac{Z(x)}{x}\int_0^x dx'\, Z(x') - Z(x)\lambda - \lambda_e^2 - \frac{Z(x)}{x}\int_0^x dx'\, x' \frac{B_z}{B_0} = 0 \tag{31}$$

となる。(31) 式で $x \to 0$ とすると $Z(x) \to z^*$ となって、(16) 式に帰着する。

B_z の見積もり

1 流体プラズマに対する運動量保存則より、

$$\nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0} \right) + \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \tag{32}$$

ここで ρ は質量密度である。この x 成分を、ある x に対して $z = 0$ から $z = Z(x)$ まで積分すると、

$$\frac{d}{dx}(\rho v_x^2 Z) - \frac{B_z(Z) B_0}{\mu_0} = 0 \tag{33}$$

を得る。ここで、圧力勾配項からの寄与は無視した。なぜなら、磁場反転領域内部における全圧はその外部における全圧と釣り合っているはずで、そこでは全圧の最低次が x に依存しないためである。

(24) 式から v_x を消去すると、

$$\frac{B_z}{B_0} = \frac{\mu_0 \rho v_1^2}{B_0^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{Z(x)} \right) \equiv M_A^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{Z(x)} \right) \tag{34}$$

$M_A = v_1 / V_A$ はアルベンマッハ数。

(34) を (31) に代入し、両辺に x/Z をかけて x で微分すると、$Z(x)$ に関する方程式が得られる。

$$\left(\zeta + \frac{\lambda_e^2}{\zeta} \right) \frac{d\chi}{d\zeta} + \zeta - \frac{1}{\zeta} + \frac{\lambda}{\zeta} = 0 \tag{35}$$

ここで $\chi \equiv M_A x / Z$、$\zeta \equiv M_A x$。

以上で磁気反転領域を記述する方程式系は完成した。すなわち、

1. (35) から磁場反転領域の厚さ Z(x) が求まる。
2. (24) から流速 $v_x(x)$ がわかる。
3. (34) から磁場の z 成分 $B_z(x)$ がわかる。

(35) は電子の慣性効果が卓越する ($\lambda << \lambda_e$) とき解析的に解くことができて、

$$\chi^2 = 1 - \frac{const.}{\chi^2 + \lambda_e^2} \tag{36}$$

となる。境界条件として、

$$Z(x=0) = z^* \simeq \lambda_e$$

を与えると $const. = \lambda_e^2$ となり、

$$Z(x) = (M_A^2 x^2 + \lambda_e^2)^{\frac{1}{2}} \tag{37}$$

を得る。また、(24) と (34) から、

$$\frac{v_x(x)}{V_A} = M_A \frac{x}{Z(x)} \tag{38}$$

$$\frac{B_z(x)}{B_0} = M_A \left\{ \frac{2M_A x}{Z(x)} - \frac{M_A^3 x^3}{Z^3(x)} \right\} \tag{39}$$

を得る。$V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho}$。

$M_A x >> z^*$ では、(35) において電子の慣性効果 (λ_e を含む項) を無視することができるので (37) より、

$$Z(x) = M_A |x| \tag{40}$$

また、(38) と (39) から、

$$v_x(x) = V_A \frac{x}{|x|} \tag{41}$$

$$\frac{B_z(x)}{B_0} = \frac{v_1}{V_A} \frac{x}{|x|} \tag{42}$$

このことから、磁気拡散領域から流出する流れの速度は流入域のアルベン速度に等しくなる。

[Mathematical Development (磁場反転領域の外部)]

外部領域を支配する方程式は、オームの法則の近似形

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{43}$$

運動量保存則、

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla P = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} \tag{44}$$

それに連続の式、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{45}$$

である。(44) 式の回転をとって、$\partial/\partial y = 0$ であることを考慮すると、

$$\mu_0 \rho (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \nabla \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{46}$$

となる。なお、導出の際にはさらに v_y と B_y が x にも z にも依存しないこと、およびプラズマの非圧縮性（$\nabla \rho = 0$）をもちいた。

融合率が小さく、あらゆる物理量が融合率のべき乗に展開できると仮定すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \cdots \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{B}_0$ は磁気再結合の起こっていないときの磁場である（このときプラズマの流れはない)。オームの法則 (43) から 1 次の項と 2 次の項をそれぞれ取り出すと、

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_0 = 0 \tag{47}$$

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}_0 = 0 \tag{48}$$

同様に、(46) 式に関しても最低次の 2 つを取り出すと、

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = 0 \tag{49}$$

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\nabla \times \boldsymbol{B}_2 + (\boldsymbol{B}_1 \cdot \nabla)\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \rho (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\nabla \times \boldsymbol{v}_1 \tag{50}$$

ここで、今考えている領域が外部領域であるため $\nabla \times \boldsymbol{B}_0 = 0$ (current free) を仮定した。

$\boldsymbol{v}_1$ の見積もり

(47) 式を $\boldsymbol{v}_1$ について解くと、

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_0}{B_0^2} + W_1 \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0}, \qquad W_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0}$$

W_1 は連続の式 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$ から、

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\frac{W_1}{B_0} = 2\frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_0}{B_0^2} \cdot \frac{\nabla B_0}{B_0} \tag{51}$$

とあらわすことができる。Petschek モデルでは、磁気反転領域の外部では $\boldsymbol{B}_0$ が一様であるとしているので $\nabla B = 0$。したがって、$\nabla_{\parallel} W_1 = 0$ となる。対称性から $x = 0$ の平面上では $W_1 = 0$ となるはずであるから、全領域で $W_1 = 0$ となる。このことから (51) 式は、

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_0}{B_0^2} \tag{52}$$

これは磁気反転領域に向かって流れる一様流である。

$\boldsymbol{B}_1$ の見積もり

$\boldsymbol{B}_1$ の境界条件は以下のようにする。

1. $z \to \infty$ のとき $\boldsymbol{B}_1 \to 0$。
2. $x \approx \pm L$ において $\boldsymbol{B}_1 \to 0$。
3. 磁場反転領域との境界では、全磁場の境界に垂直な成分は dZ/dx の 1 次のオーダーに対しては (34) 式によって与えられる $B_z(x)$ である。つまり、

$$(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = B_z(x)$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ は境界に垂直な単位ベクトル。最低次に対しては、$\hat{\boldsymbol{n}} = -dZ/dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_z$ となるから、

$$\boldsymbol{B}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \equiv B_{1n}(x) = B_z(x) + B_0 \frac{dZ}{dx} \tag{53}$$

この条件は $z = Z(x)$ におけるものであるが、最低次に対しては $z = 0$ で適用できる。

(49) 式から $\nabla_{\parallel}(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) = 0$ であるが、条件 2. により $x \approx \pm L$ では $\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = 0$ とならなければならないから、結局外部領域全体で、

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = 0$$

を満たす。すなわち、$\boldsymbol{B}_1$ はスカラーポテンシャルで表現できる。Petschek によると $\boldsymbol{B}_1$ は $z = 0$ の面に磁化密度 $2B_{1n}(x)$ の層が存在しているときにつくられる磁場と等しい。このとき解は、

$$\boldsymbol{B}_1(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} dx' \, B_{1n}(x') \frac{(x - x')\hat{\boldsymbol{e}}_x + z\hat{\boldsymbol{e}}_z}{(x - x')^2 + z^2} \tag{54}$$

となる。いま、$x >> x^*$ の場合を考えると、(40) と (42) が利用できて、(53) 式から、

$$B_{1n}(x) = 2B_0 M_A \frac{x}{|x|} \qquad x >> x^* \tag{55}$$

を得る。$\sqrt{x^2 + z^2} >> x^*$ とすれば、(54) の積分で $|x'| \le x^*$ からの寄与を無視できる。そのため、$x >> x^*$ において有効な (55) 式を $x \le x^*$ にまで適用することにより、(54) 式の積分を計算することが可能となる。さらに $\sqrt{x^2 + z^2} << L$ とすると、

$$\boldsymbol{B}_1(x, z) = \frac{4}{\pi} B_0 M_A \left\{ -\hat{\boldsymbol{e}}_x \ln \frac{L}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \tan^{-1} \frac{x}{z} \right\} \qquad x^* << \sqrt{x^2 + z^2} << L \tag{56}$$

となる。$\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1$ の特徴は、

- x 成分は磁気拡散領域に近づくにつれて減少する。
- z 成分は $x > 0$ では正、$x < 0$ では負となる。

一方、磁気拡散領域のすぐ外側の $\boldsymbol{B}_1$ は、(54) の積分で $x' \le x^*$ における $B_{1n}(x')$ の変化に依存している。Petschek は次のように仮定した。

$$B_{1n}(x) = 2B_0 M_A \frac{x}{|x|} \qquad |x| \ge x^*$$
$$B_{1n}(x) = 2B_0 M_A \frac{x}{x^*} \qquad |x| \le x^*$$

このとき $z^* << x^* << L$ を仮定すると (54) から、

$$\boldsymbol{B}_1(0, z^*) \approx -\frac{4}{\pi} B_0 M_A \ln \frac{L}{x^*} \, \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

が得られる。$x^* = \xi z^*/M_A$ とすれば、

$$\boldsymbol{B}_1(0, z^*) \approx -\frac{4}{\pi} B_0 M_A \ln \frac{M_A L}{\xi z^*} \qquad 0.5 < \xi < 1.5 \tag{57}$$

となる。

v_2 の見積もり

(48) から、

$$\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1 \frac{\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0}{B_0^2} + W_2 \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} \qquad W_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} \tag{58}$$

(54) や (57) から $\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0 < 0$ であるから、$\boldsymbol{v}_1$ の係数は正である。つまり、磁気拡散領域に向かう流れは磁場が弱まるところでは強くなる。

W_2 は連続の式 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$ から求めることができて、

$$\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla W_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\nabla(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0)}{B_0} < 0 \tag{59}$$

対称性から z 軸上では $W_2 = 0$ となるはずであるから、磁力線に沿った流れは z 軸に向かって両側から流れ込むような流れになる。

$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{B}_0$ が一定であることと $\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = 0$ であることから、

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0) = \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1)$$

となり (59) 式は、

$$B_0 \frac{\partial W_2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1)$$

ここで $\frac{\partial}{\partial s} = \nabla_\parallel$。境界条件として、

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0 \quad \text{and} \quad W_2 = 0 \qquad \text{at } x = 0$$

を与えると、$W_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1 / B_0$ となり、これを (58) 式に代入することにより、

$$\boldsymbol{v}_2 = -\frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_1}{B_0^2} \tag{60}$$

を得る。$\boldsymbol{B}_1$ の z 成分は $x > 0$ のとき正で、$x < 0$ のとき負であるから、$\boldsymbol{v}_2$ の x 成分は常に z 軸の方を向いていることになる。

[融合率]

(8) 式から (41) 式までの計算を本質的には変えず、B_0 を磁気拡散領域のすぐ外側における磁場 B_d に置き換えると、磁気拡散領域から流出する流れの速さは、

$$v_x \approx \frac{B_d}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

となる。

B_d と M_d をそれぞれ磁気拡散領域のすぐ外側における磁場とアルベンマッハ数とし、B_0 と M_A を $z >> z^*$ におけるものだとすると、z 軸に沿って $vB = const.$ であることから、

$$\frac{M_A}{M_d} = \left(\frac{B_d}{B_0}\right)^2 \tag{61}$$

(57) 式を使うと、磁気拡散領域のすぐ外側では、

$$\frac{B_d}{B_0} = 1 - \frac{4}{\pi} M_A \ln\left(\frac{M_A L}{\xi z^*}\right) \qquad \text{ただし}\ M_A << 1 \tag{62}$$

となる。

(61) において $M_d = 1$ とすると、先の議論によれば、M_A は融合率の最大値を与える。しかし、(62) 式は融合率の 1 次の解に過ぎないから、厳密解からのずれが生じる。つまり、$M_d = 1$ に対する M_A はある上限を与えるが、それは融合率の上限ではなく、擾乱の広がりの上限にすぎない。

図から分かるように、厳密解から得られる最大の融合率は、$M_d = 1$ に対する近似解の M_A よりは常に小さく、$M_d = 0.14$ における近似解の M_A よりは大きい。Petschek は明確な値を得るために、

$$\frac{B_d}{B_0} = 0.5 \quad \text{つまり} \quad \frac{M_d}{M_A} = 4$$

と仮定した。こうすると (62) より、

$$M_A \leq \frac{\pi}{8\ln(M_A L/\xi z^*)} \tag{63}$$

を得る。上式で $\xi = 1$ とすると M_A の上限は、

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{\pi}{8\ln(M_A L/\lambda_\eta)} \qquad \text{for resistive limit} \\ M_A &= \frac{\pi}{8\ln(M_A L/\lambda_e)} \qquad \text{for inertial limit} \end{aligned}$$

となる。このどちらの場合においても、最大融合率 M_A は 0.1 よりもわずかに小さい値でほぼ一定である。

2.3 Sonnerup Model

[Overview]

磁気再結合問題では 2 つの特性長が存在する。1 つは系の長さ L であり、もう 1 つは磁気拡散領域の特性長 λ_c である。この 2 つのスケール長 L と λ_c は、オーダーにして大きく異なる。そこで今、これらの中間スケールの問題を扱う場合には特性長は存在しないと考える。つまり、このとき $\boldsymbol{B}(x,z)$ と $\boldsymbol{v}(x,z)$ の座標依存性は x/z の関数のみであらわされる。

$\boldsymbol{B}$ が x/z のみに依存すると仮定することによって、少なくとも以下の 3 つの点で Petschek モデルとは異なる。

1. 融合率の上限が 1 のオーダーである（Petschek モデルでは 0.1 のオーダーであった）。
2. 遅進衝撃波の上流に遅進膨張波（slow mode expansion wave）が存在しなければならない。
3. 遅進膨張波は系の端で作られるが、このとき非一様な境界条件が必要となる。

[Mathematical Development]

極座標系 (r,θ,y) を用いる。(x,z,y) と (r,θ,y) の関係は、

$$x = r\sin\theta \qquad z = r\cos\theta \qquad y = y$$

θ は z 軸の正の方向から反時計回りの角度である。仮定により、$\boldsymbol{B}$ も $\boldsymbol{v}$ も θ のみの関数である。このとき支配方程式は、非圧縮流体に対する連続の式 (45) より、

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{64}$$

運動量保存則 (44) の r、θ 成分、

$$\rho\left[\left(v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_r-\frac{v_\theta^2}{r}\right]-\frac{1}{\mu_0}\left[\left(B_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)B_r-\frac{B_\theta^2}{r}\right]+\frac{\partial P_T}{\partial r}=0 \tag{65}$$

$$\rho\left[\left(v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}\right]-\frac{1}{\mu_0}\left[\left(B_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)B_\theta+\frac{B_r B_\theta}{r}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial P_T}{\partial\theta}=0 \tag{66}$$

ここで、$P_T=P+B^2/2\mu_0$。磁束の保存則 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ より、

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{B_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}=0 \tag{67}$$

オームの法則の近似形 (43) の y 成分、

$$E+v_rB_\theta-v_\theta B_r=0 \tag{68}$$

仮定より $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ が θ のみに依存するとして、(64)〜(67) を簡単化すると、

$$\frac{dv_\theta}{d\theta}+v_r=0 \tag{69}$$

$$\rho v_\theta\left(\frac{dv_r}{d\theta}-v_\theta\right)-\frac{B_\theta}{\mu_0}\left(\frac{dB_r}{d\theta}-B_\theta\right)+r\frac{\partial P_T}{\partial r}=0 \tag{70}$$

$$\rho v_\theta\left(\frac{dv_\theta}{d\theta}+v_r\right)-\frac{B_\theta}{\mu_0}\left(\frac{dB_\theta}{d\theta}+B_r\right)+\frac{\partial P_T}{\partial\theta}=0 \tag{71}$$

$$\frac{dB_\theta}{d\theta}+B_r=0 \tag{72}$$

となる。

ここで、渦度 ω と電流密度 j を導入する。

$$\omega=(\nabla\times\boldsymbol{v})_y=\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\to\frac{1}{r}\left(v_\theta-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) \tag{73}$$

$$j=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})_y=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r}+\frac{B_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{dB_r}{d\theta}\right)\to\frac{1}{\mu_0 r}\left(B_\theta-\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right) \tag{74}$$

(68) 式を θ で微分して、(69) と (72) をつかって v_r と B_r を消去する。この結果得られる方程式を (70) と連立させて、ω と j について解くと、

$$(\mu_0\rho v_\theta^2-B_\theta^2)\omega=\mu_0 v_\theta\frac{\partial P_T}{\partial r} \tag{75}$$

$$(\mu_0\rho v_\theta^2-B_\theta^2)j=B_\theta\frac{\partial P_T}{\partial r} \tag{76}$$

が得られる。

融合時の幾何学的な構造から次のことがいえる。

- $\theta=0$ のとき、

$$v_\theta=0\qquad\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}>0\qquad B_\theta>0$$

- $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき、

$$v_\theta=0\qquad\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}<0\qquad B_\theta<0$$

したがって、$0 < \theta < \pi/2$ で、v_θ は 0 から増加して最大となった後再び 0 に戻る。一方、B_θ は正の値から減少して 0 を通って負の値になる。つまり、この 1/4 領域の中で以下のように定義されるアルベンマッハ数、

$$M_\theta^2 \equiv \frac{v_\theta^2}{B_\theta^2/\mu_0\rho}$$

が 1 となる θ が 2 つ存在する。

いま、全圧が一様であるとして、

$$r\frac{\partial P_T}{\partial r} = 0$$

とすると、(75) と (76) から、

$$\omega = (\nabla \times \boldsymbol{v})_y = 0 \qquad j = (1/\mu_0)(\nabla \times \boldsymbol{B})_y = 0 \qquad \text{except on the lines } M_\theta^2 = 1$$

となる。このことから、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ は $M_\theta^2 = 1$ の直線上以外では一定である。条件として、

$$\theta = 0 \quad \text{のとき} \quad B_\theta = B_0 \quad v_r = v_0$$
$$\theta = \pi/2 \quad \text{のとき} \quad B_r = 0 \quad v_\theta = 0$$

を与え不連続面の jump condition を考慮に入れると、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ の解が完全に決まり、$0 < \theta < \pi/2$ における解は以下のようになる。

領域 1: $0 < \theta < \theta_1$

$$B = B_0 \qquad v = v_0 \tag{77}$$

領域 2: $\theta_1 < \theta < \theta_2$

$$B = B_0\sqrt{\frac{M_A^2 + a^2}{2}} \qquad v = V_{A0}\sqrt{\frac{M_A^2 a^{-2} + 1}{2}} \tag{78}$$

$$\tan\phi_B = \frac{M_A}{a} \qquad \tan\phi_v = -\frac{M_A}{a}$$

領域 3: $\theta_2 < \theta < \pi/2$

$$B = \frac{B_0 M_A}{a} \qquad v = V_{A0}a \tag{79}$$

ここで、

$$\cot\theta_1 = M_A \qquad \cot\theta_2 = M_A/a^2$$
$$V_{A0} \equiv B_0/\sqrt{\mu_0\rho} \qquad M_A \equiv v_0/V_{A0} \qquad a \equiv 1 + \sqrt{2}$$

また、ϕ_B と ϕ_v はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ が x 軸となす角度である。

[不連続面 $\theta = \theta_1$]

(77) と (78) から、流れが不連続面を横切るときに磁場 B は強くなる。このとき、全圧は一定であるからプラズマ圧 P は弱くなる。この変化は、遅進膨張波によるものと同じである。

[不連続面 $\theta = \theta_2$]

(78) と (79) より、この不連続面を通して磁場 B は弱くなり、その結果プラズマ圧 P は強くなる。つまり、この不連続面は Petschek モデルにおける遅進衝撃波に相当するものである。

[最大融合率]

流入速度 v_0 が増すにつれて、不連続面の x 軸からの角度が増し流出領域が広がる（この点は Petschek モデルと同じ）。v_0 が aV_{A0} に達すると流入領域と流出領域が全く同じになり、プラズマと場との正味のエネルギー交換がなくなる。そして、v_0 が aV_{A0} を上回るとプラズマのエネルギーが磁気エネルギーに変換されるようになる。このような状態は非現実的であるので、Sonnerup モデルにおける流入速度の最大値は aV_{A0} であるといわれている。したがって、最大融合率は、

$$M_A = \frac{v_0}{V_{A0}} = a = 1 + \sqrt{2} \tag{80}$$

である。（Cowley (1985) による）

2.4 Summary

[Sweet-Parker and Petschek Models]

Sweet-Parker モデルと Petschek モデルの特徴をそれぞれ挙げると、

- Sweet-Parker モデルでは、場から粒子へのエネルギー変換を磁気拡散領域内だけで行っている。そのため、通常考え得る電気抵抗率を適用すると、融合率は非常に小さく（$M_A \approx 10^{-3}$〜10^{-6}）なり非現実的である。

- Petschek モデルでは、磁気拡散領域以外に遅進衝撃波で粒子を加速させる。磁気拡散領域の扱い方は、Sweet-Parker モデルと本質的には同じであるが、エネルギー変換のほとんどは遅進衝撃波が担っているので、融合率は飛躍的に大きくなる（$M_A \approx 10^{-1}$〜10^{-2}）。

つまり、この 2 つのモデルは独立に存在するのではなく、Petschek モデルが Sweet-Parker モデルを内に含み、さらにそれを発展させたものであるという理解が正しい。

[Petschek and Sonnerup Models]

Petschek モデルと Sonnerup モデルの違いを以下に挙げる。

1. 数学的な近似の性質。
   Petschek ⋯ 融合率のべき乗に展開した。そのため、解は融合率の解析関数であらわせる。
   Sonnerup ⋯ 磁気中性線からの距離のべき乗に展開しその第 1 項目を扱った。解は距離の解析関数となる。

2. 適用範囲。
   Petschek ⋯ 融合率が小さいときにのみ有効。磁気拡散領域の効果も適切に取り入れている。
   Sonnerup ⋯ 融合率による制約はないが、磁気拡散領域の周辺には適用できない。

3. 物理的プロセス。
   いずれのモデルも遅進衝撃波を仮定しているが、それが存在できるためには衝撃波面の法線方向に

磁場成分が存在しなければならない（遅進波が磁力線に垂直には伝播できないため）。モデルでは $|z| >> z^*$ で磁力線が x 軸に平行であることを仮定しているので、磁場反転領域の周辺では何らかの方法で磁力線が曲げられなければならない。

Petschek $\cdots$ 速進膨張波 (fast mode expansion wave) をもちいる。

Sonnerup $\cdots$ 遅進膨張波 (slow mode expansion wave) をもちいる。

3 Single Particle Approach

前章では、MHD によって記述される磁気再結合モデルのなかで代表的なものをいくつか説明した。これらの重要な結果として、遅進衝撃波が存在すること、流出速度が流入領域のアルベン速度程度になること、などが得られた。

本章では、磁気中性線近傍における単一粒子の振る舞いを考察し、ここから得られる結果が MHD モデルと矛盾しないことを示す。（前章があまりに長くなってしまったのでこの章は極簡潔に述べます。）

$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフトによって磁気中性線近傍の電流層に接近しているイオンを考える。このイオンが電流層に到達すると、磁場反転領域の中で振動運動はじめると同時に、電場 E によって y 方向に加速される。しかし、B_z が存在するため x 方向にローレンツ力 ev_yB_z を受け、イオンは磁気中性線から遠ざかる方向に向きを変えられる。イオンは、その運動の方向がほぼ x 方向になるまで電流層の中で向きを変えつづけるが、その後、はぼ磁力線に沿って電流層から外に出る。このとき、イオンは電流層との相互作用によって、$eE_y\Delta_y$ のエネルギーを得る。

このような粒子の振る舞いは、Speiser (1965) によって以下の形で得られた。

$$\boldsymbol{B} = B_0\left(\frac{z}{L}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \delta\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \quad L \geq z \geq -L$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= c_3\dot{y} \\ \ddot{y} &= -c_3\dot{x} + c_1\, z\dot{z} + c_2 \\ \ddot{z} &= -c_1\, z\dot{y} \end{aligned}$$

ここで、$c_1 = qB_0/mL$、$c_2 = qB_0/m$、$c_3 = qB_0\delta/m$。

いま、x 軸にそって磁気中性線から離れる方向 $v_f = E/B_z$ で動く座標系で考える。つまり、磁力線とともに動く系で考える。こうすることによって、$E = 0$ とすることができる。この系では、イオンは磁力線に沿って v^* で電流層に接近し、磁力線に沿って v^* で電流層から離れる。

磁力線と動く系では、磁気張力とプラズマの動圧が釣り合っている。電流層の y 方向の単位長さあたりに掛かる力は、

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} j_yB_z\,dz = \frac{1}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} B_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\,dz = \frac{2B_xB_z}{\mu_0} \tag{81}$$

一方、イオン 1 個あたりの x 方向の運動量の変化は、

$$2m_iv_x = 2m_iv^*\frac{B_x}{B}$$

電流層の単位面積に単位時間に流入するイオンの個数は、

$$2nv_z = 2nv^*\frac{B_z}{B}$$

したがて、単位時間にイオンが得る運動量は、電流層単位面積当り、

$$\dot{P}_x = 4nm_i {v^*}^2 \frac{B_x B_z}{B^2} \tag{82}$$

(81) と (82) が等しいと考えると、

$$v^* = \frac{V_A}{\sqrt{2}} \qquad V_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n m_i}} \tag{83}$$

となる。プラズマの流入速度が小さいと仮定すると、$v_f \simeq v^*$ とできるので、もとの座標系で考えると、

$$v_x = 2v_f \simeq \sqrt{2} V_A \tag{84}$$

を得る。この値は、Petschek モデルや Sonnerup モデルにおける流出速度（(41)、(79)）にほぼ等しい。また、x 軸に対する磁力線の角度は、

$$\sin\theta_f \simeq \frac{B_z}{B} = \frac{\sqrt{2}}{V_A} V$$

によりあたえられ、流入速度が大きくなるにつれて角度が増すことがわかる。

　さらに、電流層で加速されたイオンは加熱されるはず（つまり $\Delta P > 0$）なので、加熱されていない外部イオンとの間に反磁性電流が流れ、境界層をつくる。反磁性電流は、高温イオン領域の磁場を弱める（$\Delta B < 0$）。したがって、この電流層は Petschek モデルにおける遅進衝撃波に相当する。

References

[1] Cowley, S. W. H., Magnetic reconnection, in *Solar System Magnetic Fields* edited by E. R. Priest, 121-155, 1985.

[2] Forbes, T. G., The nature of Petschek-type reconnection, *Earth Planets Space*, **53**, 423-429, 2001.

[3] Sonnerup, B. U. Ö., Magnetic-field re-connexion in a highly conducting incompressible fluid, *J. Plasma Phys.*, **4**, 1970.

[4] Sonnerup, B. U. Ö., Magnetic field reconnection, in *Solar System Plasma Physics* edited by L. J. Lanzerotti, C. F. Kennel, and E. N. Parker, **3**, 45-108, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[5] Speiser, T. W., Particle trajectries in model current sheets 1: Analytical solutions, *J. Geophys. Res.*, **70**, 4219-4226, 1965.

[6] Vasyliunas, V. M., Theoretical models of magnetic field line merging, 1, *Rev. Geophys.*, **13**, 303-336, 1975.

Contents