

Fluctuations

Keizo Fujimoto

MPEWG June 18, 2002

Department of Geophysics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1 Introduction

1.1 What is a fluctuation ?

ゆらぎ【揺らぎ】

①ゆらくこと。ゆれ。「心の—」

②〔数〕(fluctuation) 統計平均からのずれ。巨視的には一定であっても、微視的には平均値前後でたえず変動している現象。

(広辞苑第五版)

ゆらぎ

[英仏 fluctuation 独 Schwankung 露 флуктуация]

揺らぎ、揺動ともいう。

[1]一般に確率現象で確率変数 x の平均値を $\langle x \rangle$ としたとき、観測値 x の $\langle x \rangle$ からの偏差 $\Delta x = x - \langle x \rangle$ をいう。ゆらぎの大きさを測る目安としてふつう分散 $\langle \Delta x^2 \rangle$ をとるが、ゆらぎを厳密に規定するのは x の確率分布である。2値以上の確率変数 x_1, x_2, \dots のゆらぎについては分散行列 $\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle$ によって表わされる相関の概念が重要である。確率過程 $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ については、*相関関数 $\langle \Delta x_i(t_1) \Delta x_j(t_2) \rangle$ によって $x_i(t), x_j(t)$ のゆらぎの相互の関連が表わされる。特に $\langle \Delta x_i(t_1) \Delta x_i(t_2) \rangle$ を自己相関関数という。定常確率過程の場合には、相関は $t_1 - t_2$ だけの関数である。ゆらぎ $\Delta x(t)$ のパワースペクトルと自己相関関数の間には、ウィーナー-ヒンチンの定理(⇨パワースペクトル)が成り立つ。

[2]熱平衡にある物質系のゆらぎの法則は統計力学によって与えられ、一般に*揺動散逸定理が成り立つ。*ブラウン運動、抵抗体の*熱雑音、密度のゆらぎによる光散乱などはゆらぎのいちじるしい例で、これらの観測からボルツマン定数を求めることができる。ゆらぎは一般に系が不安定に近づくとともに増大する。例えば2成分溶液が臨界点に近づくときの密度のゆらぎの異常な増大(⇨臨界揺動)による光の散乱はタンパク光とよばれる。

(理化学辞典第5版)

- プラズマ系の状態量 (温度、密度など; 誘電率) とゆらぎ (相関関数) との関係
→ 揺動散逸定理
- 相関関数とゆらぎのスペクトルとの関係 → Wiener-Khinchin の関係

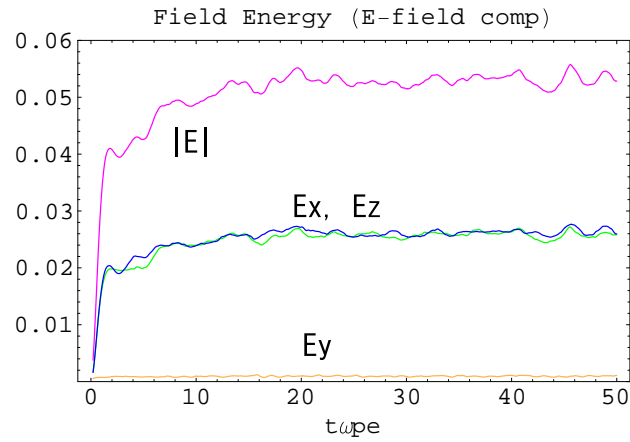
平衡状態にあるプラズマ系の状態量がわかれば、ゆらぎのスペクトルが求められる。
逆に、ゆらぎのスペクトルが観測されればプラズマの状態量がわかる。

1.2 The Ω uctuation of the electric field in numerical simulations

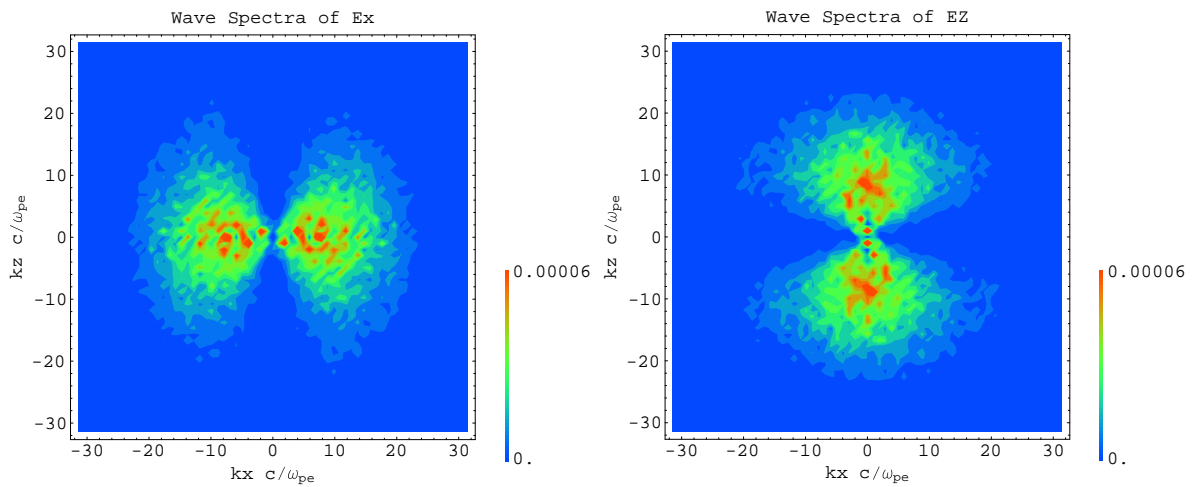
[設定条件]

- 2次元 $x - z$ 空間、 $B_0 = B_0 \hat{e}_z$, $E_0 = \emptyset$
- 電子は磁化されているがイオンは磁化されていない。
- $m_i/m_e = 100$, $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.0$, $T_e/T_i = 1.0$, $\beta = 0.02$.

[Time development of the mean energy of the electric field]

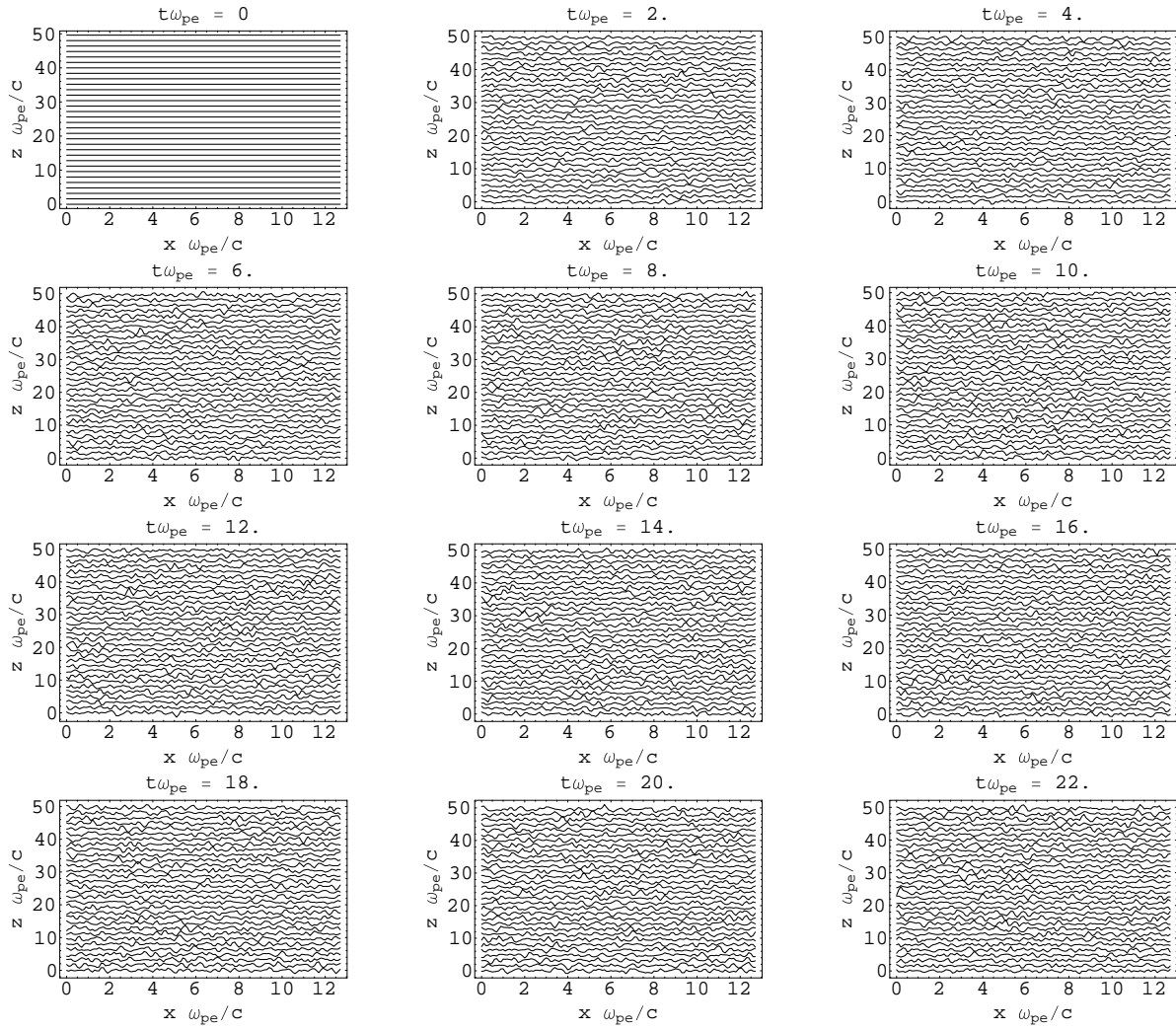


[Wave spectra of the electric field]



[Space-time variation of the E_x field]

Ex field



2 Energy Spectra of the Electrostatic Fluctuations

2.1 The Fluctuation-Dissipation Theorem

熱平衡状態にある一様な物理系を考える。外部から擾乱場 $A(\mathbf{r}, t)$ が印加され、それによって系のエネルギーの増加が物理量 $j(\mathbf{r}, t)$ を通じて、

$$U(t) = - \int d\mathbf{r} A(\mathbf{r}, t) \cdot \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1)$$

もしくは、

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = - \int d\mathbf{r} \dot{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (2)$$

によってあらわされるものとする。今、擾乱場 $A(\mathbf{r}, t)$ が十分に弱いとすると、系の応答 $j(\mathbf{r}, t)$ は線形応答のみを考えれば良いので、線形演算子 $\hat{\alpha}_{ij}$ を用いて、

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \hat{\alpha}_{ij} A_j(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

とあらわされる。(3) 式を時間・空間的にフーリエ変換すると、

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) A_j(\mathbf{k}, \omega) \quad (4)$$

となる。ここで、 $\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ を線形応答関数とよぶ。

さて、以下では $j_i(\mathbf{r}_1, t_1)$ と $j_j(\mathbf{r}_2, t_2)$ の相関関数について考える。

$j_i(\mathbf{r}_1, t_1)$ と $j_j(\mathbf{r}_2, t_2)$ の相関関数の時間空間的相関関数は以下のように定義される。

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}, t} \equiv \langle j_i(\mathbf{r}_1, t_1) j_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 、 $t = t_2 - t_1$ である。また、 $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}, t}$ のフーリエ変換は、

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \equiv \int d\mathbf{r} dt \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}, t} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (6)$$

によって定義される。

統計力学の一般理論によれば、擾乱場 $A(\mathbf{r}, t)$ と物理量 $j(\mathbf{r}, t)$ の間に、(1)(もしくは(2)) 式と(4) 式の間関係があるとき、

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{i\hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} \{ \alpha_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) - \alpha_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \} \quad (7)$$

が成り立つ。この関係が揺動散逸定理 (*fluctuation-dissipation theorem*) である。揺動散逸定理の導出は例えば Sitenko(1967) や戸田盛和・久保亮五(1978) に詳しくかかれているのでこれらを参照されたい。

次に、熱平衡状態にある一様なプラズマを考える。このプラズマ中に擾乱電場 $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ が生じて電流 $j(\mathbf{r}, t)$ が流れたとする。このとき、プラズマが単位時間、単位領域で得る内部エネルギーは $\tilde{E} \cdot j$ であるから、

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \int d\mathbf{r} \tilde{E}(\mathbf{r}, t) \cdot j(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

となる。Maxwell 方程式、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (9)$$

の第 2 式の右边を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\mu_0 j_i + \varepsilon_0 \mu_0 \delta_{ij} \dot{E}_j &= \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{ij} \dot{E}_j \\ \therefore j_i &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}) \dot{E}_j\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、 ε_{ij} は誘電率テンソルである。この式に擾乱電場を含めて $\dot{E}_j \rightarrow \dot{E}_j + \tilde{E}_j$ とすると、

$$j_i = \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}) (\dot{E}_j + \tilde{E}_j) \quad (11)$$

Maxwell 方程式 (9) をフーリエ変換することにより、

$$\Lambda_{ij}^0 E_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} j_i(\mathbf{k}, \omega) \quad (12)$$

ここで、

$$\Lambda_{ij}^0 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \delta_{ij}$$

(11) 式を使って (12) 式から j_i を消去すると、

$$\Lambda_{ij} E_j(\mathbf{k}, \omega) = (\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}) \tilde{E}_j(\mathbf{k}, \omega) \quad (13)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}$$

この Λ_{ij} は $\Lambda_{ij} E_j = 0$ を満たす。(13) 式より、

$$E_i(\mathbf{k}, \omega) = \Lambda_{ik}^{-1} (\delta_{kj} - \varepsilon_{kj}) \tilde{E}_j(\mathbf{k}, \omega) \quad (14)$$

Λ_{ij}^{-1} は Λ_{ij} の逆行列 (テンソル) で $\Lambda_{ik}^{-1} \Lambda_{kj} = \delta_{ij}$ を満たす。(14) 式を (13) 式に代入し $\delta_{ij} - \varepsilon_{ij} = \Lambda_{ij}^0 - \Lambda_{ij}$ を用いることにより、

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = i\varepsilon_0 \omega (\Lambda_{ik}^0 \Lambda_{kl}^{-1} \Lambda_{lj} - \Lambda_{ij}^0) \tilde{E}_j(\mathbf{k}, \omega) \quad (15)$$

が導ける。この式は、系に印加された擾乱電場 \tilde{E}_j とそれに対する応答 j_i の関係を表している。(8) 式と (15) 式が (2) 式と (4) 式にそれぞれ対応していることを考えると、電流 j_i の相関関数は揺動散逸定理より、

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{\varepsilon_0 \omega^2 \hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} \Lambda_{ik}^0 (\Lambda_{lk}^{-1} - \Lambda_{kl}^{-1*}) \Lambda_{lj}^0 \quad (16)$$

とあらわされる。また、(13) 式から電場 E_i の相関関数は次のようになる。

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{i}{\varepsilon_0} \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} (\Lambda_{ji}^{-1} - \Lambda_{ij}^{-1*}) \quad (17)$$

次に、(17) 式から揺らいでいる電場のエネルギースペクトルを求める。まず、(17) 式において古典物理学に対する近似 ($\hbar \rightarrow 0$) を行う。また、エネルギースペクトルを求めたいのだから、 $i = j$ とし自己相関関数のみを考える。すると、(17) 式は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{i}{2} \frac{T}{\omega} \{ \Lambda_{ii}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) - \Lambda_{ii}^{-1*}(\mathbf{k}, \omega) \} \quad (18)$$

ここで、 $\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ の対角成分だけを考えると、 $\Lambda_{ii}^{-1} = 1/\Lambda_{ii}$ とできる。このとき、

$$\frac{1}{\Lambda_{ii}} - \frac{1}{\Lambda_{ii}^*} = 2i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\Lambda_{ii}} \right] \quad (19)$$

の関係を用いると (18) 式は、

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{T}{\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\Lambda_{ii}(\mathbf{k}, \omega)} \right] \quad (20)$$

となる。興味があるのは波数スペクトルであるから、(20) 式を $-\infty < \omega < \infty$ で積分する。

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} \right] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{T}{\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\Lambda_{ii}(\mathbf{k}, \omega)} \right] \quad (21)$$

この積分は次節で述べる Kramers-Kronig の関係式を用いて解析的に実行できる。

2.2 The Kramers-Kronig Relation

$$f(\mathbf{k}, \omega') = \frac{1}{\omega' - \omega + i\eta} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} - 1 \right] \quad (22)$$

なる関数を考える。ここで、 $\Lambda(\mathbf{k}, \omega)^{-1} - 1$ は $\operatorname{Im} \omega > 0$ において正則な関数とする。そのため、図のような径路に沿って $f(\mathbf{k}, \omega')$ を積分すると、コーシーの定理により

$$\int_{C_1+C_2} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega + i\eta} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} - 1 \right] = 0 \quad (23)$$

一方、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} - 1 \right] = 0$$

であるから、無限遠での半円 C_2 上での積分値は 0 である。したがって、(23) 式は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega + i\eta} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} - 1 \right] = 0 \quad (24)$$

となる。プレメリの式から

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega' - \omega + i\eta} = P \left(\frac{1}{\omega' - \omega} \right) - \pi i \delta(\omega' - \omega) \quad (25)$$

ここで、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \eta} + \int_{\omega + \eta}^{\infty} \right]$$

はコーシーの主値積分である。(25) 式を用いると (24) 式は、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} - 1 \right] - i\pi \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} - 1 \right] = 0 \quad (26)$$

となる。(26) 式の実部と虚部を別々に書くと

$$\text{実部} : \text{Im} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} \right] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \left[1 - \text{Re} \frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} \right] \quad (27)$$

$$\text{虚部} : \text{Re} \left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} \right] - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \text{Im} \frac{1}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega')} \quad (28)$$

この2式が Kramers-Kronig の関係式である。

(18) 式を (28) 式と比較すると、

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{T}{2} \left[1 - \text{Re} \frac{1}{\Lambda_{ii}(\mathbf{k}, \omega = 0)} \right] \quad (29)$$

となることが分かる。

2.3 The Wiener-Khinchin Relation

自己相関関数 $\langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{r}}$ のフーリエ変換 $\langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}}$ とパワースペクトル $\langle |E_i(\mathbf{k})|^2 \rangle$ の関係を求める。まず、定義により、

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}} = \int_V d\mathbf{x} \langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{r}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (30)$$

V は系全体の体積をあらわす。一方、

$$\langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{r}} = \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r}' E_i(\mathbf{r}') E_i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \quad (31)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \int_V d\mathbf{r}' E_i(\mathbf{r}') E_i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \exp[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\ &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \int_V d\mathbf{r}' E_i(\mathbf{r}') E_i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \exp[-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r})] \exp[-i\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{r}')] \\ &= \frac{1}{V} \left[\int_V d\mathbf{r}' E_i(\mathbf{r}') \exp[-i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'] \right] \left[\int_V d\mathbf{r} E_i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r})] \right] \\ &= \frac{1}{V} E_i(-\mathbf{k}) E_i(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\langle E_i E_i \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} |E_i(\mathbf{k})|^2 \quad (32)$$

の関係が成り立つ。これが Wiener-Khinchin の関係である。

さて、電場 $E_i(\mathbf{r})$ のエネルギースペクトル $\mathcal{E}_i(\mathbf{k})$ を以下のように定義する。

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \langle |E_i(\mathbf{r})|^2 \rangle = \int d\mathbf{k} \mathcal{E}_i(\mathbf{k}) \quad (33)$$

このとき、

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon_0}{8\pi^2} \frac{|E_i(\mathbf{k})|^2}{V} \quad (34)$$

ただし、空間は 2 次元を仮定している (後で 2 次元シミュレーションと比較するため)。

(29)、(32)、および (34) 式から、揺らいでいる静電場のエネルギースペクトルは、

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{k}) = \frac{T}{8\pi^2} \left[1 - \operatorname{Re} \frac{1}{\Lambda_{ii}(\mathbf{k}, \omega = 0)} \right] \quad (35)$$

となる。

2.4 Dielectric Tensor

ここまでは、 $\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ の形を特定しないで議論を進めてきた。この節では、静電場に対する $\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ を具体的に求める。静電場では $\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ は誘電率テンソル $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ に等しくなる。

まず、電子とイオンの分布関数は等方的な Maxwell 分布とする。

[ion の分布関数]

$$f_{i0} = n_0 \left(\frac{1}{\pi v_i^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_i^2} \right] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} v_{\perp}^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v_i &= \sqrt{2T_i/m_i} \end{aligned}$$

[electron の分布関数]

$$f_{e0} = n_0 \left(\frac{1}{\pi v_e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_e^2} \right] \quad (37)$$

$$\begin{aligned} v_{\perp}^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v_e &= \sqrt{2T_e/m_e} \end{aligned}$$

次に、線形化されたブラソフ方程式から、イオンと電子それぞれの場合について分布関数の微小変数 δf_i 、 δf_e を求める。

[ion]

イオンは磁化されていないと仮定しているため磁場の効果は無視する。

$$\frac{d\delta f_i}{dt} = -\frac{e}{m_i} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{i0} \quad (38)$$

ここで、以下のような波動解を仮定する。

$$\delta \mathbf{E} = \delta \hat{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \delta f_i = \delta \hat{f}_i \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

$\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ とする。(38) 式をフーリエ変換すると、

$$\delta \hat{f}_i = -\frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^0 \delta \hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{i0}(\mathbf{v}') \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - \omega)\tau] d\tau \quad (39)$$

ここで、 $\tau = t' - t$ 、 $\mathbf{v}'(t') = \mathbf{v}(t)$ 。(39) 式を少し計算すると、

$$\delta \hat{f}_i = i \frac{2e}{m_i} \frac{v_x \delta \hat{E}_x + v_y \delta \hat{E}_y + v_z \delta \hat{E}_z}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} \quad (40)$$

[electron]

電子については磁場の効果も考慮に入れる。

$$\frac{d\delta f_e}{dt} = \frac{e}{m_e} (\delta \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} \quad (41)$$

(41) 式の $\delta \mathbf{B}$ をファラデーの法則から消去しイオンの場合と同様、フーリエ変換を行う。

$$\delta \hat{f}_e = \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^0 \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}}{\omega} \mathbf{k} \right\} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}'} \exp[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} - \omega \tau] d\tau \quad (42)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ 、 $\tau = t' - t$ 。電子の場合はラーマー運動を考慮に入れているので (42) 式の積分軌道が以下のようにやや複雑になる。

$$\begin{aligned} v'_x(t') &= v_{\perp} \cos(\omega_{ce}(t' - t) + \theta) = v_{\perp} \cos(\omega_{ce}\tau + \theta) \\ v'_y(t') &= v_{\perp} \sin(\omega_{ce}(t' - t) + \theta) = v_{\perp} \sin(\omega_{ce}\tau + \theta) \\ v'_z(t') &= v_{\parallel} \\ x'(t') &= x + \frac{v_{\perp}}{\omega_{ce}} [\sin(\omega_{ce}\tau + \theta) - \sin \theta] \\ z'(t') &= z + v_{\parallel}\tau \end{aligned}$$

θ は粒子の初期位相である。上の積分軌道に沿って (42) 式を計算すると、

$$\delta \hat{f}_e = i \frac{2e}{m_e} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{n}{\lambda} v_{\perp} J_n \delta \hat{E}_x + i v_{\perp} J'_n \delta \hat{E}_y + v_{\parallel} J_n \delta \hat{E}_z}{\omega - n\omega_{ce} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}^2} \exp[n(\theta - \frac{\pi}{2}) + \lambda \cos \theta] \quad (43)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \\ J_n &= J_n(\lambda) \quad n \text{ 次のベッセル関数} \\ J'_n &= \frac{dJ_n}{d\lambda}\end{aligned}$$

誘電率テンソルは (15) 式より、

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}} = \delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \delta \hat{\mathbf{j}} \quad (44)$$

と定義されている。ここで、

$$\delta \hat{\mathbf{j}} = e \left[\int d\mathbf{v} \mathbf{v} \delta \hat{f}_i - \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \delta \hat{f}_e \right] \quad (45)$$

(40)、(43) 式を (45) 式に代入し、その結果をさらに (44) 式に代入することにより、誘電率テンソル $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ は以下のようにあらわせる。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (46)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= 1 + \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + \xi_i Z(\xi_i)] \sin^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 I_n \xi_0 Z(\xi_n) \\ \epsilon_{yy} &= 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} \mu e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n^2}{2\mu^2} I_n + (I_n - I'_n) \right\} \xi_0 Z(\xi_n) \\ \epsilon_{zz} &= 1 + \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + \xi_i Z(\xi_i)] \cos^2 \theta + \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \xi_0 \xi_n [1 + \xi_n Z(\xi_n)] \\ \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = -i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (I_n - I'_n) \xi_0 Z(\xi_n) \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + \xi_i Z(\xi_i)] \sin \theta \cos \theta + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\mu}} e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n \xi_0 [1 + \xi_n Z(\xi_n)] \\ \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sqrt{2\mu} e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_n - I'_n) \xi_0 [1 + \xi_n Z(\xi_n)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{\omega - n\omega_{ce}}{k_{\parallel} v_e}, \quad \mu = \frac{k_{\perp}^2 v_e^2}{2\omega_{ce}^2} \\ \xi_i &= \frac{\omega}{k v_i}, \quad I_n = I_n(\mu) \quad n\text{-th modified Bessel function} \\ I'_n &= \frac{dI_n}{d\mu}, \quad \tan \theta = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}\end{aligned}$$

このことから静電場に対する誘電率は、

$$\varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k}}{k^2} = 1 + \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + \xi_i Z(\xi_i)] + \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left[1 + \xi_0 e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n Z(\xi_n) \right] \quad (47)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \varepsilon_L \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

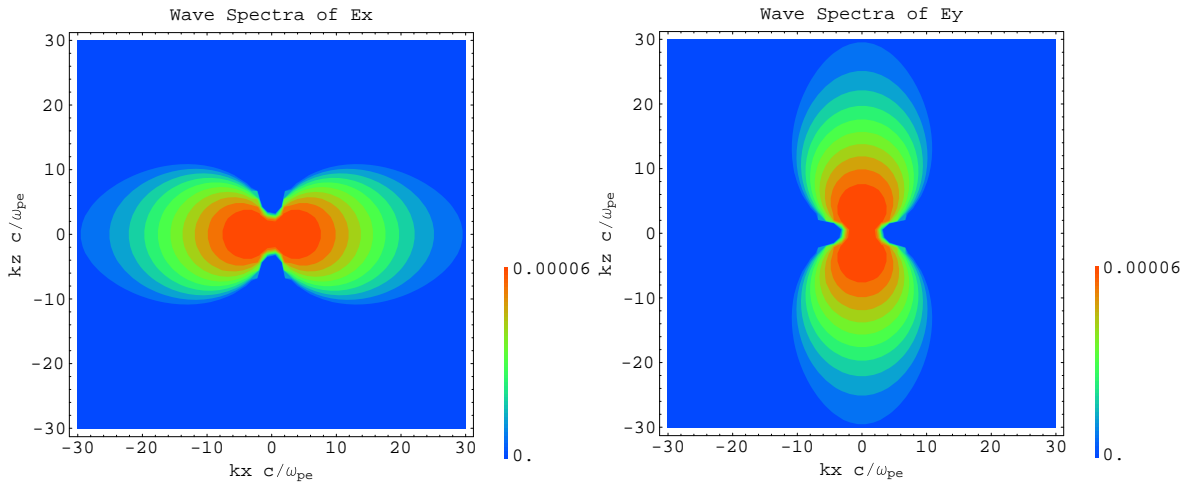
(35) 式における Λ_{ii} は ε_{Lii} に等しいから、

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{k}) = \frac{T}{8\pi^2} \left[1 - \text{Re} \frac{1}{\varepsilon_{Lii}(\mathbf{k}, \omega = 0)} \right] \quad (49)$$

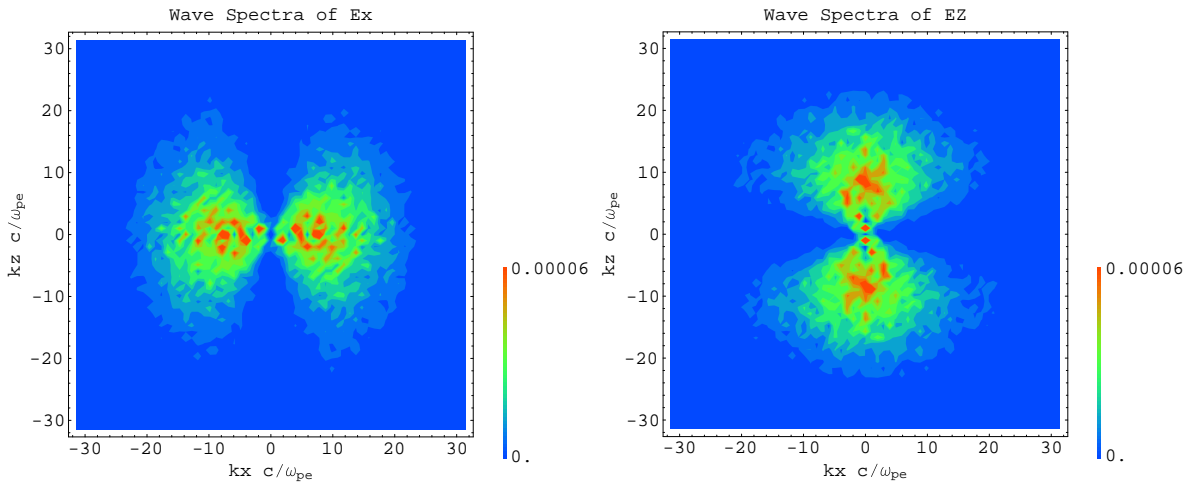
となる。

3 Comparison with Numerical Simulations

[Theory]



[Simulation Results]

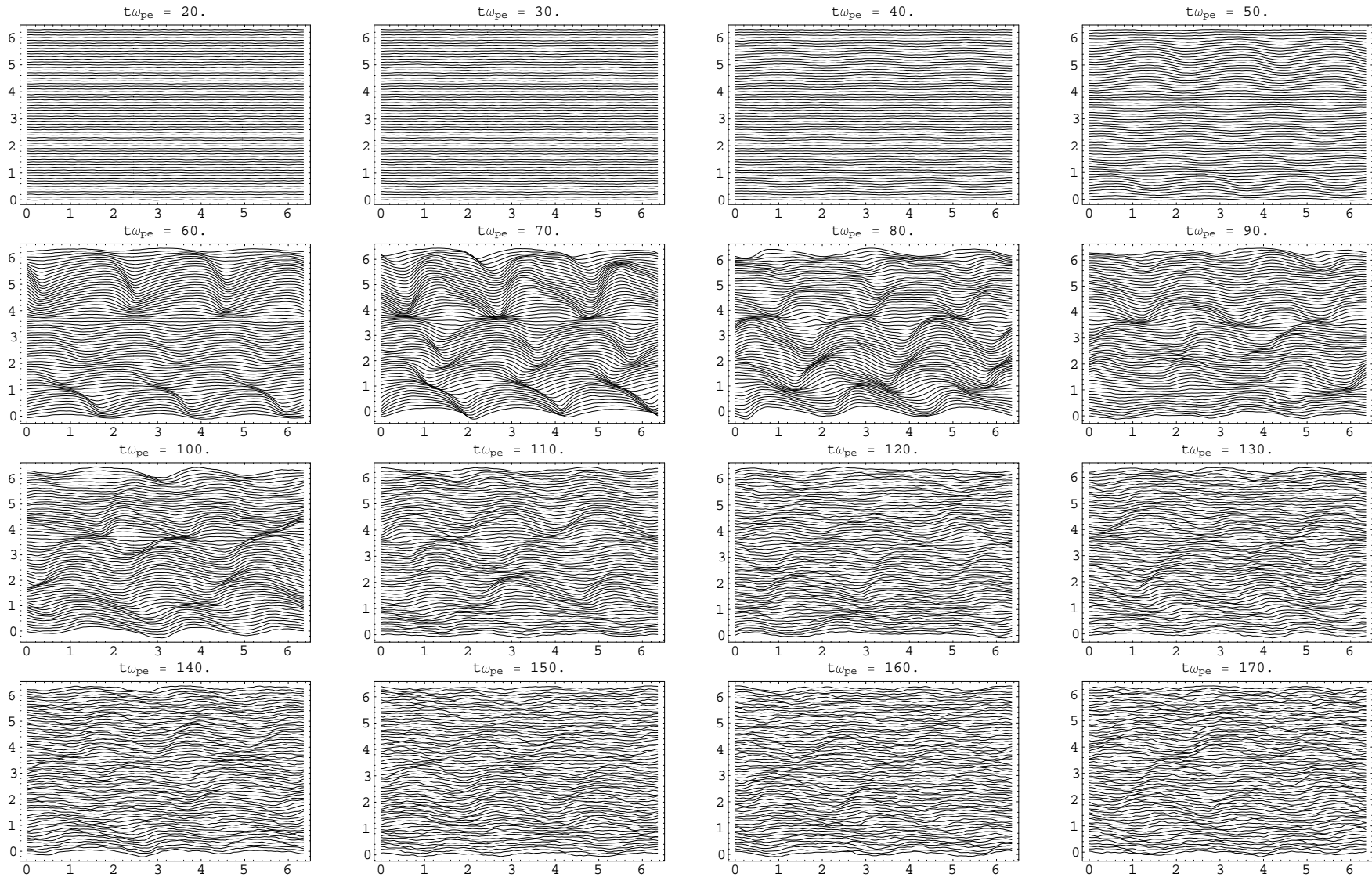


4 Application

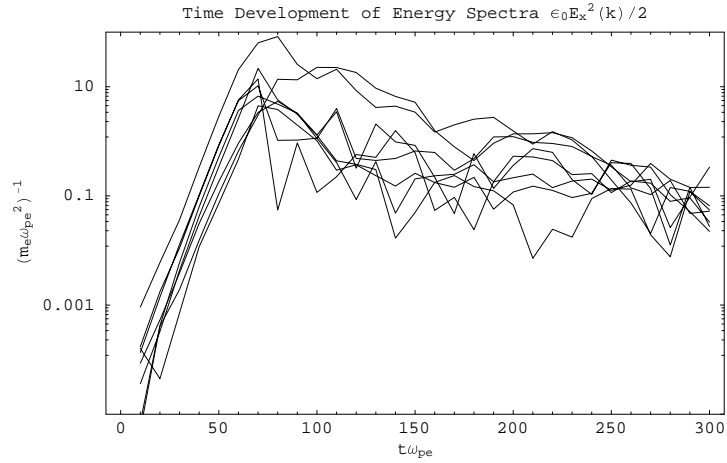
[The instability due to ion beam]

$$m_i/m_e = 100, \omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.0, T_e/T_i = 1.0, \beta = 0.02, V_{ib}/c = 0.5.$$

Ex Field



[Time Development of the Energy Spectra]

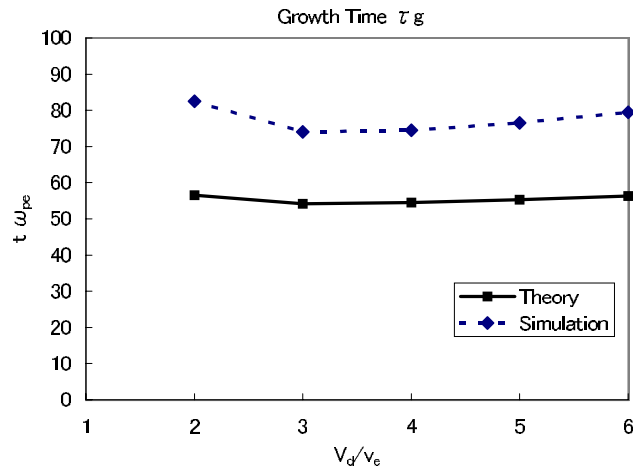


[Growth Time]

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^0 = \frac{T}{8\pi^2} \left[1 - \text{Re} \frac{1}{\epsilon_{xx}(\mathbf{k}, \omega = 0)} \right]$$

$$\mathcal{E}_{k_x}^{sat} = \frac{\epsilon_0 L_x L_y}{32\pi^2} \left[\frac{k_x m_e V_{id}^2}{e} \left(1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \right) \right]^2$$

$$\mathcal{E}_{k_x^M}^{sat} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}^M}^0 \exp[2\Omega^M \tau_g]$$



参考文献

- [1] Birdsall, C. K. and A. B. Langdon, Plasma physics via computer simulation, Institute of Physics Publishing, 1991.
- [2] Cable, S., and T. Tajima, Low-frequency Ω uctuations in plasma magnetic fields, Phys. Rev. A, 46, 3413-3441, 1992.
- [3] 一丸節夫, プラズマの物理学, 産業図書, 1981.
- [4] Nicholson D. R., プラズマ物理の基礎, 丸善, 1986.
- [5] Sitenko A. G., Electromagnetic Ω uctuations in plasma, published by Academic Press, 1967.
- [6] 戸田盛和, 久保亮五編, 岩波講座現代物理学の基礎 5 統計物理学, 岩波書店, 1978.

Contents

1	Introduction	1
1.1	What is a fluctuation ?	1
1.2	The fluctuation of the electric field in numerical simulations	2
2	Energy Spectra of the Electrostatic Fluctuations	4
2.1	The Fluctuation-Dissipation Theorem	4
2.2	The Kramers-Kronig Relation	6
2.3	The Wiener-Khinchin Relation	7
2.4	Dielectric Tensor	8
3	Comparison with Numerical Simulations	12
4	Application	12