

Overview of the Two Dimensional Electromagnetic Particle Code

Keizo Fujimoto

MPEWG November 6, 2001

Department of Geophysics, Graduate School of Science,
Kyoto University

第1章 Introduction

磁気圏サブストームに伴って、極域では美しいオーロラが観測される (実際に見たことがないので想像)。これは、magnetotailで加速された高エネルギープラズマが地球をとりまく磁力線に沿って電離層に注ぎ込むためである。このような高エネルギー粒子の生成には、neutral sheetにおける磁気リコネクションが重要な役割を果たしていると考えられる。磁気リコネクションは、磁場エネルギーを効率よく粒子の運動エネルギーに転換するメカニズムとして、太陽フレアや磁気圏サブストームの主因として古くから注目を集めてきたが、その素過程は未だに解明されていない。

図 1.1 はリコネクション領域周辺のプラズマ流の様子を模式的に描いたものである。リコネクション領域とは neutral point からイオンの慣性長 (c/ω_{pi}) 程度 (plasma sheet では数 100 ~ 数 1000 km) の範囲をいう。矢印の太さによって流れの速さの相対的な違いをあらわしている。neutral point では、その名のとおり磁場の強さは 0 であり、そこから離れるにつれて磁場は大きくなる。したがって、リコネクション領域から離れた場所では、プラズマは磁化されていると考えることができるが、リコネクション領域の中心付近 (電子の慣性長 c/ω_{pe} よりも内側、数 km ~ 数 10 km) では磁場が弱いためプラズマは磁化されず、電子もイオンも磁場が無いかのようにふらふら動いていると考えられる。

一方、この 2 つの領域の遷移領域、つまり、neutral point からの距離が電子の慣性長よりも大きくイオンの慣性長よりは小さい領域では、電子は磁化されているがイオンは磁化されていない。このような領域では、電子の $E \times B$ ドリフトは電子の Alfvén 速度 ($= B/\sqrt{\mu_0 n_e m_e} \sim 4.0 \times 10^4$ km/s ~ 8 keV) まで加速することが可能となり、高エネルギーの電子ビームが観測される可能性がある。実際、GEOTAIL 衛星によりサブストーム発生時に neutral sheet で高エネルギー電子が観測されている (Figure 1, figure 2, cited from *Shinohara et al.*, 1998)。

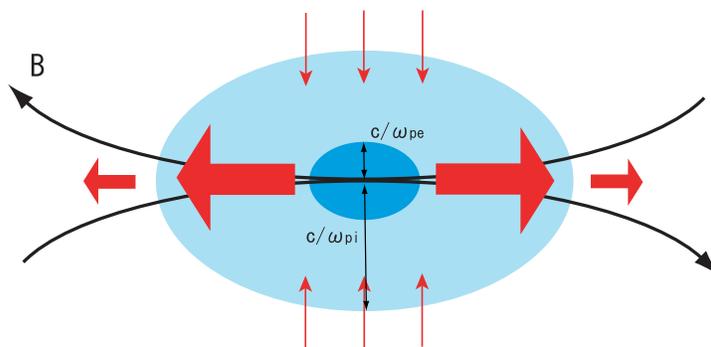


図 1.1: リコネクション領域の周辺のプラズマ流。矢印の太さの違いは流れの速さの相対的な違いを示す。

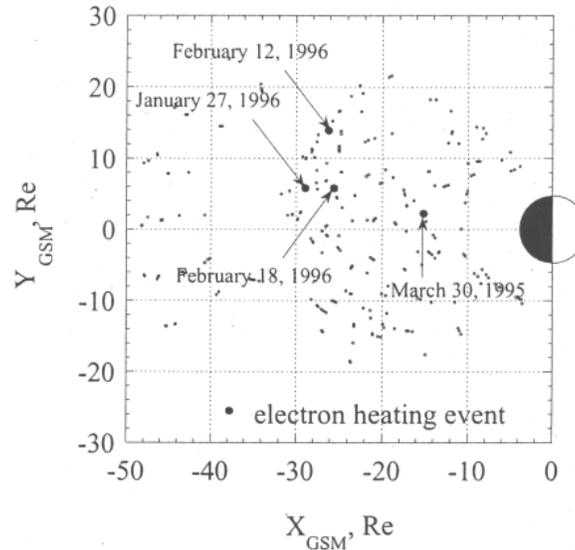


Figure 1. The Geotail locations at the onsets in the GSM coordinates. The onsets are identified by Pi2 bursts on the ground station Kakioka. We found four electron heating events among the 321 events.

Table 1. List of the Electron Heating Events and Wave Energy Density

Date	March 30, 1995	January 27, 1996	February 12, 1996	February 18, 1996
Time, UT	1107:30	1404:59	1258:41	1332:56
n , cm^{-3}	0.38	0.031	0.040	0.077
T_e , keV	5.1	6.3	8.8	9.9
T_i , keV	1.1	2.2	1.5	3.6
V_{zi} , km/s	-610	-1600	-1100	-340
$V_{pi}/v_{Th,i}$	0.53	0.42	0.49	0.32
$ B $, nT	6.7	9.8	11	8.3
B_y , nT	-0.85	-4.7	-8.3	-6.7
B_z , nT	-5.3	-8.6	-7.5	-3.1
β	21	1.1	1.3	6.1
$\mathcal{E}_B/nT_e \times 10^7$	0.78-4.6	7.1-57	14-210	2.9-27
η_{an} , Ωm	78-460	770-6200	630-9500	380-3600

このような高エネルギー電子が観測されたからといって、必ずしも高速の電子ビーム ($E \times B$ ドリフト) が存在するとは言えないが、そのような高速ビームの存在を考えても決して不自然ではない。

本研究では、まず、neutral point 周辺で電子のみが磁化されている領域に着目し、電子ビームが磁力線を横切って流れるときに発生する波動モード及び、波動と粒子の非線形相互作用を見る。研究のアプローチとしては、主に計算機による数値シミュレーションを行うことにより、実際に起こりうる波動モードを模索する。

以下では、プラズマ物理の研究によく用いられるシミュレーションコードについて簡単に述べる。

1.1 Simulation Codes

一口に計算機シミュレーションといっても、再現したい現象の時間・空間スケールによって適用できるシミュレーションコードが異なる。ここでは、プラズマが2成分(電子とイオン)からな

るものとして、3つのコード（粒子コード、ハイブリッドコード、MHDコード）についてその特徴を比較する。

まず、粒子コードとは、電子・イオンともに粒子として扱うもので、プラズマ振動数・デバイ長により特徴づけられるミクロスケールの現象に対して有効である。具体的には、波動・粒子間の共鳴効果や粒子の速度分布関数の偏りにともなう不安定波動の励起など、個々の粒子運動に基づく運動論的效果を再現することができる。その反面、粒子コードをマクロな系にまで適用しようとすると、粒子の数が膨大となりすぐに計算機のメモリ容量を越えてしまう。

一方、ハイブリッドコードとは、イオンは粒子として扱うが電子は質量をもたない流体として扱うものである。そのため、このコードではデバイ長程度の現象や電子の運動論的效果を扱うことはできないが、デバイ長よりも大きくイオンサイクロトロン振動数よりも低周波の現象を扱うことができ、しかもイオンの運動論的效果を記述することができる。

MHD(電磁流体)コードは、電子・イオンともに流体として扱ったもので、時間・空間スケールがそれぞれイオンサイクロトロン振動数・イオンサイクロトロン半径に比べてずっと大きな現象にのみ適応可能である。空間の特性長としてはプラズマの広がりサイズ、時間の特性長としては Alfvén 波がプラズマを通過する時間などが使われる。

時間・空間スケールによる分類を表 1.1 にまとめる。

シミュレーションコード	特徴的な空間スケール	特徴的な時間スケール
粒子コード	デバイ長 (λ_D)	電子のプラズマ振動数の逆数 (ω_{pe}^{-1})
ハイブリッドコード	イオンの慣性長 (c/ω_{pi})	イオンのサイクロトロン周期
MHDコード	magnetotail の幅 磁気圏の厚さ 等	Alfvén 波の通過時間 (L/V_A)

表 1.1: 計算機シミュレーションコードの比較

本研究では、波動と粒子(電子)の相互作用を見ることが主な目的である。このような相互作用には、2流体不安定性のような流体的なものだけではなく、粒子の分布関数の形状が問題となるものまで含まれる。つまり、プラズマの運動論的な扱いが必要となる。そのため、粒子コードを用いなければならない。

第2章 Equations Used in the Electromagnetic Particle Code

2.1 Fundamental Equations

粒子シミュレーションでは、一般的に「超粒子」とよばれる粒子の集団を用いる。超粒子とは、粒子の電荷と質量の比 (e/m) を保存しながら、電荷 e と質量 m を現実の電子やイオン (陽子) に比べて桁違いに大きくしたものである。現実の粒子ではなく超粒子を用いる理由は、実際の計算に用いる粒子の数を大幅に減らすためである。例えば、密度が $1.0/cc$ のプラズマ中の電子が光速で飛び回っているとすると、デバイ長は $10^5 m$ 程度となる。シミュレーション中の格子点間隔をデバイ長の10分の1程度にとると、2次元シミュレーションの場合1つの格子に入る粒子の個数は平均で 10^{12} 程度になる。格子点の数を 100×100 とすると、計算に用いる粒子の数は 10^{16} 個になってしまう。これは到底計算機で扱えるような数ではない。

また、超粒子に広がりをもたせることにより物理量を空間的に平滑化し、数値的なノイズを軽減させる働きもある。超粒子の数値的な扱いについては後述する。

さて、 j 番目の超粒子の位置 \mathbf{x}_{sj} と速度 \mathbf{v}_{sj} はニュートンの運動方程式、

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_{sj}}{dt} = q_s [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{sj}) + \mathbf{v}_{sj} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{sj})] \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{sj}}{dt} = \mathbf{v}_{sj} \quad (2.2)$$

によってもとめられる。ここで、 m_s と q_s はそれぞれ超粒子の質量と電荷を表し、 \mathbf{E} と \mathbf{B} はそれぞれ粒子の位置における電場、磁場である。また、下付き文字 s は粒子の種類をあらわす (以下、電子の場合は e 、イオンの場合は i とする)。

次に、電磁場は以下に示す Maxwell の方程式により記述される。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

ここで、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} は超粒子の位置と速度から、

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sum_s q_s n_s(\mathbf{x}) \mathbf{v}_s \quad (2.8)$$

とあらわせる。ここで、 n_s は格子点の位置 x における粒子数密度である。

ここで注意すべきことは、粒子の位置 x_j は格子点間の任意の位置を取ることができるのに対して、場の量 E 、 B やマクロ量 ρ 、 j は格子点上のみで定義された値であるということである。そのため、運動方程式 (2.1) における $E(x_{sj})$ 、 $B(x_{sj})$ や Maxwell 方程式における $\rho(x)$ 、 $j(x)$ を求める際には注意が必要である。具体的な方法については、第 3.3 節 (p.11) と第 3.4 節 (p.13) で述べることにし、次節では、上で求めた方程式を無次元化し実際にシミュレーションの中で解いている方程式系を導く。

2.2 Normalization

前節で示した方程式系は、個々の物理量が SI 単位系で記述されることを前提としている。しかしながら、SI 単位系のままであると、地球物理学においてしばしばそうであるように異なる物理量の間で桁数に大きな違いが出てしまう。例えば、電子の質量は 10^{-30} (kg) であるのに対して、電子の速さは 10^7 (m/s) 程度になることもある。このような桁数の大きな違いは、数値計算の過程で丸め誤差の原因になる可能性がある。そのため、個々の物理量に対して特徴的なスケールを定め、それを基準にして無次元化をおこない、ある程度桁数をそろえた上で方程式を解く方が効率的である。また、基本的な物理量によって規格化を行うことによって、得られた結果が直感的に解釈し易くなるというメリットもある。例えば、電子の速度が 10^7 (m/s) であると言うよりも、光速の 10 分の 1 程度であるといった方が直感的に分かりやすい。

MKSA 単位系を用いているので、無次元化に必要な物理量は 4 つ (kg, m, sec, C) で必要十分である。用いる基本量は、

質量	m_e
長さ	$\frac{c}{\omega_{pe}}$
時間	ω_{pe}^{-1}
電荷	e

とする。このとき、

$$m_s^* = \frac{m_s}{m_e}, \quad \mathbf{x}_s^* = \frac{\omega_{pe}}{c} \mathbf{x}_s, \quad t^* = \omega_{pe} t, \quad q_s^* = \frac{q_s}{e} \quad (2.9)$$

となる。*がついているのは、その物理量が無次元量であることを示す。その他の物理量の無次元化も以下のように行うことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^* &= \frac{\mathbf{v}_s}{c}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{E}^* = \frac{e\mathbf{E}}{m_e c \omega_{pe}}, \\ \mathbf{B}^* &= \frac{e\mathbf{B}}{m_e \omega_{pe}}, \quad \rho^* = \frac{1}{e} \left(\frac{c}{\omega_{pe}} \right)^2 \rho, \quad \mathbf{j}^* = \frac{1}{ec} \left(\frac{c}{\omega_{pe}} \right)^2 \mathbf{j}, \\ n_s^* &= \left(\frac{c}{\omega_{pe}} \right)^2 n_s \end{aligned} \quad (2.10)$$

以上を用いて前節で示した式 (2.1) ~ (2.8) を書きかえると次のようになる。

運動方程式、

$$m_s^* \frac{d\mathbf{v}_{sj}^*}{dt^*} = q_s^* [\mathbf{E}^*(\mathbf{x}_{sj}^*) + \mathbf{v}_{sj}^* \times \mathbf{B}^*(\mathbf{x}_{sj}^*)] \quad (2.11)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{sj}^*}{dt^*} = \mathbf{v}_{sj}^* \quad (2.12)$$

Maxwell 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} = -\nabla^* \times \mathbf{E}^* \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t^*} = \nabla^* \times \mathbf{B}^* - \frac{1}{n_0^*} \mathbf{j}^* \quad (2.14)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{E}^* = \frac{1}{n_0^*} \rho^* \quad (2.15)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{B}^* = 0 \quad (2.16)$$

電荷密度と電流密度、

$$\rho^*(\mathbf{x}^*) = \sum_s q_s^* n_s^*(\mathbf{x}^*) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{j}^*(\mathbf{x}^*) = \sum_s q_s^* n_s^*(\mathbf{x}^*) \mathbf{v}_s^* \quad (2.18)$$

以下では煩雑さを避けるために無次元量であっても * を省略して書くことにする。

第3章 Procedure of the Simulation

3.1 Overview

図 3.1 に時間 1 ステップ分の計算の流れを示す。この図で右肩の添え字 ($n - \frac{1}{2}, n$ など) は時間ステップをあらわす。また、右下の添え字 L, T はそれぞれ波数ベクトルに平行な成分と垂直な成分をあらわす。まず、運動方程式 (2.11)、(2.12) から速度 v_{sj} と位置 x_{sj} の時間発展を求める (①、②)。注意すべき点は、位置 x_{sj} は整数時刻で与えられているのに対して、速度 v_{sj} は半整数時刻で定義されている点である。すべての粒子の位置と速度がわかれば、任意の格子点における粒子数密度が分かるから式 (2.17)、(2.18) から電荷密度と電流密度を求めることができる (③)。電荷密度と電流密度の空間分布から、Maxwell 方程式 (2.13) ~ (2.16) を介して電場 E と磁場 B の時間発展を記述することができる (④、⑤)。

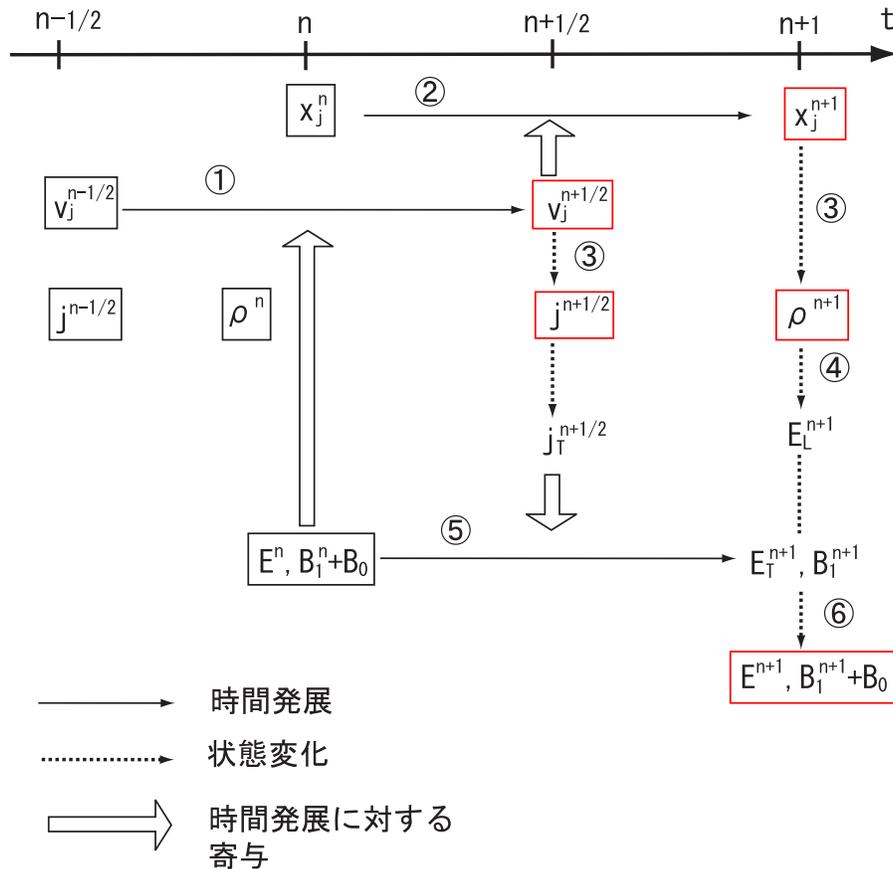


図 3.1: 時間 1 ステップ分の計算手順。番号は計算の順序をあらわす。 n は 0 以上の整数。

以下の節ではそれぞれのステップについてもう少し詳しく見ていく。

3.2 Boundary Condition and Initial Conditions

[Boundary Condition]

周期境界条件とする。

[Initial Conditions]

図 3.1 から分かるように、必要な初期条件はすべての粒子の位置 x_{sj}^0 と速度 $v_{sj}^{-1/2}$ 、電場と磁場の変動成分 (E^0, B_1^0)、それに主磁場 B_0 である。このモデルでは一様電場は無いとしている。粒子の速度は、半ステップ過去の値を与えていることに気をつけなければならない。

特定の波動の伝播を再現する場合には、その波動の分散関係や各々の物理量の位相差を考慮して初期条件を与える必要がある。具体的な例は第 5 章 (p.21) で述べるとして、ここでは粒子に Maxell 分布を与える方法 (Box-Muller method) について述べる。

Box-Muller method は、0 から 1 までの 2 つの一様乱数 x_1, x_2 をつかって正規分布 (Gauss 分布)、

$$p(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \quad (3.1)$$

をなす 2 つの数 y_1, y_2 をつくる方法である。ここで $p(y)$ は確率密度関数である。

確率密度関数 $p(x_1, x_2)$ と $p(y_1, y_2)$ の関係は、

$$p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = p(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1 dy_2 \quad (3.2)$$

一様乱数の場合 $p(x_1, x_2) = 1$ であるから、

$$p(y_1, y_2) = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \quad (3.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2 \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

とすれば y_1, y_2 は正規分布をなす。これが正しいことは、実際に (3.3) 式を計算して $p(y_1, y_2)$ を求めてみればわかる。(3.4) 式より、

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} \\ x_2 &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

これを (3.3) 式に代入すると、

$$p(y_1, y_2) = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \quad (3.6)$$

となり、 y_1 と y_2 は独立に正規分布をなす。つまり、2つの一様乱数を取り出してきて (3.4) 式の一方から y を求める、という操作を多数の粒子に対して行えば Maxwell 分布をなす粒子群をつくることができる。ちなみに、熱速度を v_t とすると、

$$\begin{aligned} v_1 &= v_t \sqrt{-\ln x_1} \cos 2\pi x_2 \\ v_2 &= v_t \sqrt{-\ln x_1} \sin 2\pi x_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。 $v_t = 0.1$ の場合の Maxwell 分布を図 3.2 に示す。

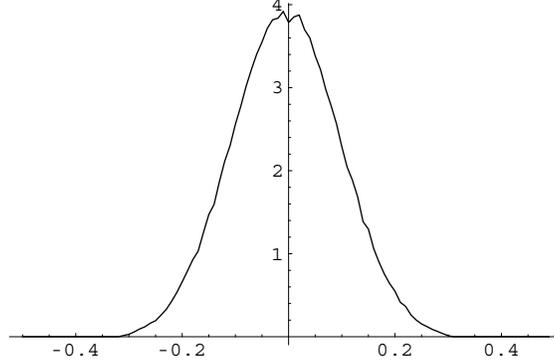


図 3.2: Box-Muller method により求めた Maxwell 分布 ($v_t = 0.1$)

3.3 Momentum Equations

粒子の速度 v_{sj} と位置 x_{sj} の時間発展方程式 (2.11)、(2.12) を以下のように差分化する。

$$\frac{\mathbf{v}_s^{n+1/2} - \mathbf{v}_s^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}^n(\mathbf{x}_s^n) + \frac{\mathbf{v}_s^{n+1/2} + \mathbf{v}_s^{n-1/2}}{2} \times \mathbf{B}^n(\mathbf{x}_s^n) \right] \quad (3.8)$$

$$\frac{\mathbf{x}_s^{n+1} - \mathbf{x}_s^n}{\Delta t} = \mathbf{v}_s^{n+1/2} \quad (3.9)$$

格子点上で定義された $\mathbf{E}(X_i)$ 、 $\mathbf{B}(X_i)$ (X_i は i 番目の格子点の位置) から j 番目の粒子の位置における電場と磁場 $\mathbf{E}(x_j)$ 、 $\mathbf{B}(x_j)$ を求めるために、超粒子に有限の広がりをもたせる。以下では、具体的に $\mathbf{E}(X_i)$ 、 $\mathbf{B}(X_i)$ から $\mathbf{E}(x_j)$ 、 $\mathbf{B}(x_j)$ を求める方法について述べる。

図 3.3 のように、超粒子の広がりを $\Delta x \times \Delta y$ の長方形とする。このとき、粒子の位置 (x_j, y_j) における電場は 4 つの格子点 (X_i, Y_i) 、 (X_{i+1}, Y_i) 、 (X_i, Y_{i+1}) 、 (X_{i+1}, Y_{i+1}) における電場から、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_j, y_j) &= \mathbf{E}(X_i, Y_i) \frac{S_{11}}{\Delta x \Delta y} + \mathbf{E}(X_i, Y_{i+1}) \frac{S_{12}}{\Delta x \Delta y} \\ &\quad + \mathbf{E}(X_{i+1}, Y_i) \frac{S_{21}}{\Delta x \Delta y} + \mathbf{E}(X_{i+1}, Y_{i+1}) \frac{S_{22}}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

のように求める。このように格子点上で定義されたり物理量を個々の粒子の位置に割り当てる方法を CIC (cloud in cell) 法という。より一般的には形状因子 $S(x, y)$ というものを用いて、

$$\mathbf{E}(x_j, y_j) = \sum_i \mathbf{E}(X_i, Y_i) S(X_i - x_j, Y_i - y_j) \quad (3.11)$$

とあらわされる。形状因子 $S(x, y)$ とは点 $(0, 0)$ にある粒子の点 (x, y) への分配率、もしくは点 (x, y) における物理量から粒子への分配率をあらわす。粒子コードでよく使われる形状因子は、

$$S(x, y) = \frac{(\Delta x - |x|)(\Delta y - |y|)}{\Delta x \Delta y}, \quad |x| \leq \Delta x, \quad |y| \leq \Delta y \quad (3.12)$$

である。これは図 3.4 のような形をしている。

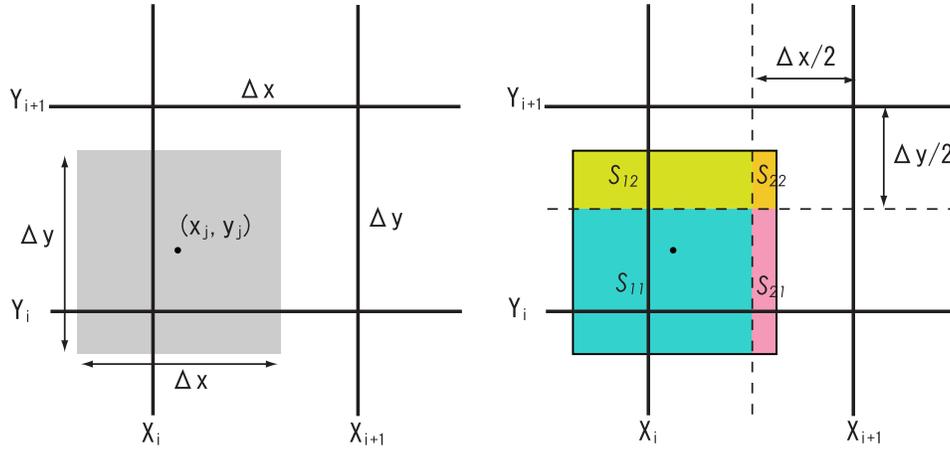


図 3.3: 超粒子の広がり。 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{21} 、 S_{22} はそれぞれの領域の面積を示す。

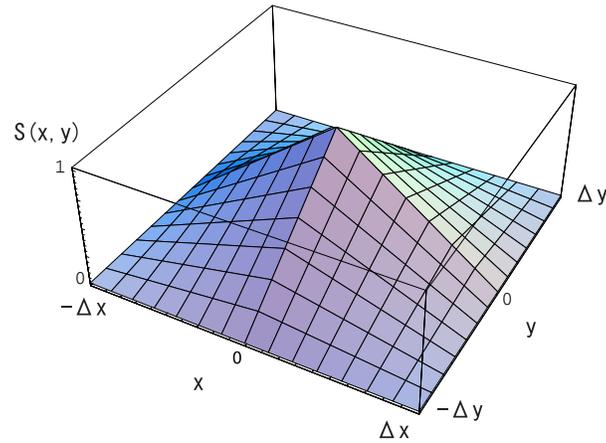


図 3.4: よく用いられる形状因子の形。

メモ

(3.8) 式は以下により簡単化して用いる。ここでは煩雑さを避けるため粒子種をあらわす s は省略することにする。

$$v^{n-1/2} = v^- - \frac{qE^n \Delta t}{m} \frac{\Delta t}{2} \quad (3.13)$$

$$v^{n+1/2} = v^+ + \frac{qE^n \Delta t}{m} \frac{\Delta t}{2} \quad (3.14)$$

とにおいて、これらを (3.8) 式に代入する。

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B}^n \quad (3.15)$$

ここで、全体の流れを考えると、与えられた $\mathbf{v}^{n-1/2}$ に対して (3.13) 式から \mathbf{v}^- を求める。次に、(3.15) 式から \mathbf{v}^+ を求め最後に (3.14) 式から 1 ステップ後の速度 $\mathbf{v}^{n+1/2}$ を求める。そこで、以下では (3.14) 式を変形して、 \mathbf{v}^- から \mathbf{v}^+ を求める式を導出する。

$\mathbf{B}^- = (q\Delta t/2m) \mathbf{B}^n$ とおくと (3.15) 式は、

$$\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B}^- \quad (3.16)$$

となる。さらに、

$$\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^+ \times \mathbf{B}^- = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{B}^- \equiv \mathbf{v}_d \quad (3.17)$$

と変形する。上式の両辺に右から $\times \mathbf{B}^-$ を作用させると、

$$(\mathbf{v}^+ \times \mathbf{B}^-) - (\mathbf{v}^+ \times \mathbf{B}^-) \times \mathbf{B}^- = \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}^- \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{v}^- \times \mathbf{B}^-) + (\mathbf{v}^- \times \mathbf{B}^-) \times \mathbf{B}^- = \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}^- \quad (3.19)$$

(3.18) 式より、

$$(1 + |\mathbf{B}^-|^2)\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}^- + (\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{B}^-)\mathbf{B}^- \quad (3.20)$$

(3.19) 式より、

$$\mathbf{v}_d = (1 + |\mathbf{B}^-|^2)\mathbf{v}^- + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}^- - (\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{B}^-)\mathbf{B}^- \quad (3.21)$$

式 (3.20)、(3.21) から、

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \frac{2}{1 + |\mathbf{B}^-|^2} \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}^- \quad (3.22)$$

となる。

3.4 Charge Assignment

ある格子点における電荷密度 $\rho(\mathbf{X}_i)$ と電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{X}_i)$ を求める。そのためには、個々の粒子に付随する位置 x_{sj} と速度 \mathbf{v}_{sj} を格子点上に割り当てる必要がある。このときも前節で述べた形状因子 $S(x, y)$ を用いる (CIC 法)。ここで、 \mathbf{v}_{sj} は半整数時間における値であるのに対し、 $S(x, y)$ は整数時間で定義されていることに注意する。 $\rho(\mathbf{X}_i)$ 、 $\mathbf{j}(\mathbf{X}_i)$ は以下のようにあらわされる。

$$\rho^n(\mathbf{X}_i) = \sum_s \sum_j q_s S(x_{sj}^n - X_i, y_{sj}^n - Y_i) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{j}^{n+1/2}(\mathbf{X}_i) = \sum_s \sum_j q_s \mathbf{v}_{sj}^{n+1/2} \frac{S(x_{sj}^n - X_i, y_{sj}^n - Y_i) + S(x_{sj}^{n+1} - X_i, y_{sj}^{n+1} - Y_i)}{2} \quad (3.24)$$

右肩の添え字 $(n, n + 1/2, n + 1)$ は時間ステップをあらわす。

3.5 Poisson's Equation

電荷密度分布がわかれば、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L |_{\mathbf{X}_i} = \frac{1}{n_0} \rho(\mathbf{X}_i) \quad (3.25)$$

から静電場 \mathbf{E}_L を求めることができる。添え字 L は波数ベクトルに沿った方向の成分であることを示す。つまり、 \mathbf{E}_L は波動の静電波成分をあらわす。

(3.25) 式をフーリエ変換して解くことを考える。 \mathbf{E}_L は静電場であるからスカラーポテンシャル ϕ によって表現でき、

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{X}_i) = -\nabla\phi |_{\mathbf{X}_i} \quad (3.26)$$

となる。したがって、(3.25) 式は ϕ を用いて書くとポアソン方程式、

$$\nabla^2\phi |_{\mathbf{X}_i} = -\frac{1}{n_0} \rho(\mathbf{X}_i) \quad (3.27)$$

となる。ここで、格子点の位置を整数 l, m を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= l \Delta x \hat{e}_x + m \Delta y \hat{e}_y \\ l &= 0, 1, \dots, N_x - 1 & N_x : x \text{ 方向の格子点数} \\ m &= 0, 1, \dots, N_y - 1 & N_y : y \text{ 方向の格子点数} \end{aligned}$$

とあらわすことにする。そして、格子点における物理量を $A_{l,m}$ のようにかく。

さて、例えば電荷密度 ρ の離散フーリエ変換は、

$$\rho_{k_x, k_y} = \Delta x \Delta y \sum_l \sum_m \rho_{l,m} e^{-i(k_x x_l + k_y y_m)} \quad (3.28)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} (x_l, y_m) &= (l \Delta x, m \Delta y) \\ (k_x, k_y) &= \left(\frac{2\pi n_x}{N_x \Delta x}, \frac{2\pi n_y}{N_y \Delta y} \right) \\ n_{x,y} &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N_{x,y}}{2} - 1, -\frac{N_{x,y}}{2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

また、離散フーリエ逆変換は、

$$\rho_{l,m} = \frac{1}{(N_x \Delta x)(N_y \Delta y)} \sum_{n_x=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{n_y=-N_y/2}^{N_y/2-1} \rho_{k_x, k_y} e^{i(k_x x_l + k_y y_m)} \quad (3.30)$$

となる。 ϕ や \mathbf{E} についても同様である。

まず、(3.27) 式を差分化する。

$$\frac{\phi_{l+1,m} - 2\phi_{l,m} + \phi_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{l,m+1} - 2\phi_{l,m} + \phi_{l,m-1}}{\Delta y^2} = -\frac{n_0}{\rho_{l,m}} \quad (3.31)$$

この式をフーリエ変換すると、

$$K_{\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{k}} = \frac{\rho_{\mathbf{k}}}{n_0} \quad (3.32)$$

ここで、

$$K_{\mathbf{k}}^2 = k_x^2 \text{dif}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + k_y^2 \text{dif}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right) \quad (3.33)$$

$$\text{dif} \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\theta} \quad (3.34)$$

である。次に、(3.26) 式の x 成分を差分化する (静電場であることを示す L は省略する)。

$$E_{x,l,m} = -\frac{\phi_{l+1,m} - \phi_{l-1,m}}{2\Delta x} \quad (3.35)$$

フーリエ変換すると、

$$E_{x,\mathbf{k}} = -i\kappa_{x,\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \quad \kappa_{x,\mathbf{k}} = k_x \text{dif}(k_x \Delta x) \quad (3.36)$$

(3.32) 式と (3.36) 式から、

$$E_{x,\mathbf{k}} = -i \frac{\kappa_{x,\mathbf{k}}}{n_0 K_{\mathbf{k}}^2} \rho_{\mathbf{k}} \quad (3.37)$$

同様に、

$$E_{y,\mathbf{k}} = -i \frac{\kappa_{y,\mathbf{k}}}{n_0 K_{\mathbf{k}}^2} \rho_{\mathbf{k}} \quad (3.38)$$

2次元シミュレーションであるので E_z の静電場成分は 0 である。

(3.37) 式、(3.38) 式をフーリエ逆変換することにより静電場 E_L を求めることができる。

3.6 Faraday's Law and Ampère's Law

この節では Faraday の電磁誘導方程式と Ampère の方程式、

$$\left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_i} = -\nabla \times \mathbf{E}_T |_{\mathbf{X}_i} \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_i} = \nabla \times \mathbf{B} |_{\mathbf{X}_i} - \frac{1}{n_0} \mathbf{j}_T(\mathbf{X}_i) \quad (3.40)$$

から電磁場の時間発展を求める。添え字 T は波の伝播方向に垂直な成分であることをしめす。ここでも、上の式を差分化した後、フーリエ変換することによって 1 時間ステップ後の電磁場を求める。

まず式 (3.39)、(3.40) を差分化する。

$$\frac{\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n}{\Delta t} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{E}_T^{n+1} + \mathbf{E}_T^n}{2} \right) \quad (3.41)$$

$$\frac{\mathbf{E}_T^{n+1} - \mathbf{E}_T^n}{\Delta t} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n}{2} \right) - \frac{1}{n_0} \mathbf{j}_T^{n+1/2} \quad (3.42)$$

(3.41) 式と (3.42) 式から B^{n+1} を消去すると、 $(\mathbf{E}_T^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{j}_T^{n+1/2})$ から \mathbf{E}_T^{n+1} を求めることができる。

$$\left[1 + \frac{\Delta t^2}{4} \nabla \times \nabla \times\right] \mathbf{E}_T^{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta t^2}{4} \nabla \times \nabla \times\right] \mathbf{E}_T^n + \Delta t \nabla \times \mathbf{B}^n - \frac{\Delta t}{n_0} \mathbf{j}_T^{n+1/2} \quad (3.43)$$

このとき、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_T = -\nabla^2 \mathbf{E}_T$ となるから、上の式は次のようになる。

$$\left[1 - \frac{\Delta t^2}{4} \nabla^2\right] \mathbf{E}_T^{n+1} = \left[1 + \frac{\Delta t^2}{4} \nabla^2\right] \mathbf{E}_T^n + \Delta t \nabla \times \mathbf{B}^n - \frac{\Delta t}{n_0} \mathbf{j}_T^{n+1/2} \quad (3.44)$$

(3.44) 式の ∇ の部分をさらに差分化してから、フーリエ変換を行う。 ∇ の差分化は以下のように行う。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_{l+1,m} - 2\mathbf{E}_{l,m} + \mathbf{E}_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{E}_{l,m+1} - 2\mathbf{E}_{l,m} + \mathbf{E}_{l,m-1}}{\Delta y^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{B_{z,l,m+1} - B_{z,l,m-1}}{2\Delta y} \\ -\frac{B_{z,l+1,m} - B_{z,l-1,m}}{2\Delta x} \\ \frac{B_{y,l+1,m} - B_{y,l-1,m}}{2\Delta x} - \frac{B_{x,l,m+1} - B_{x,l,m-1}}{2\Delta y} \end{bmatrix}$$

したがって、(3.44) 式をフーリエ変換すると、

$$\left[1 + \frac{\Delta t^2}{4} K_{\mathbf{k}}^2\right] \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta t^2}{4} K_{\mathbf{k}}^2\right] \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^n + i\Delta t \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^n - \frac{\Delta t}{n_0} \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^{n+1/2} \quad (3.45)$$

ここで、 $(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{n+1}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^n, \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^n, \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^{n+1/2})$ はそれぞれ $(\mathbf{E}_T^{n+1}, \mathbf{E}_T^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{j}_T^{n+1/2})$ のフーリエ成分であり、 $K_{\mathbf{k}}^2$ と $\boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{k}}$ は、

$$K_{\mathbf{k}}^2 = k_x^2 \text{dif}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + k_y^2 \text{dif}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_x \text{dif}(k_x \Delta x) \\ k_y \text{dif}(k_y \Delta y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

により定義される。次に (3.41) 式をフーリエ変換して、

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{n+1} = \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^n - i\Delta t \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{n+1} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^n}{2} \right) \quad (3.46)$$

これにより B^{n+1} のフーリエ成分 $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{n+1}$ を求める。

最後に、 $(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{n+1}, \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{n+1})$ をフーリエ逆変換することにより、1時間ステップ後の電磁場 $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{B}_T^{n+1})$ を求めることができる。

第4章 Characteristic of the CIC Method

4.1 Wave Number Dependence of Shape Factor $S(x)$

形状因子 $S(x)$ は、

$$S(x, y) = \frac{(\Delta x - |x|)(\Delta y - |y|)}{\Delta x \Delta y}, \quad |x| \leq \Delta x, \quad |y| \leq \Delta y \quad (4.1)$$

であらわされる。 $S(x, y)$ を定義域でフーリエ変換する。

$$\begin{aligned} S(k_x, k_y) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} S(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \dots \\ &= \left[\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\frac{k_x \Delta x}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\frac{k_y \Delta y}{2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

図 4.1 は、 $S(k_x, k_y)$ を $|k_x \Delta x| \leq 2\pi$ 、 $|k_y \Delta y| \leq 2\pi$ の範囲で描いたものである。ただし、実際のシミュレーションでは $|k_x \Delta x| \leq \pi$ 、 $|k_y \Delta y| \leq \pi$ の範囲しかとることができない。

この図からわかるように、CIC 法では高周波の波動成分が大きく減衰を受ける。この効果は、数値計算を安定化させる。しかしながら、その一方で高周波の波動の伝播はうまく再現できないことを意味する。

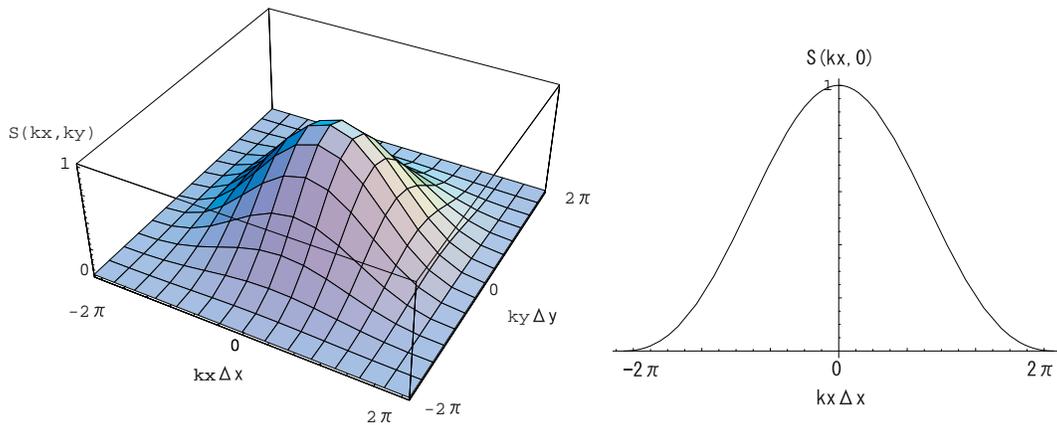


図 4.1: 形状因子の波数依存性

4.2 Fault in CIC Method

CIC 法を使用する上で以下のような不具合が確認された。

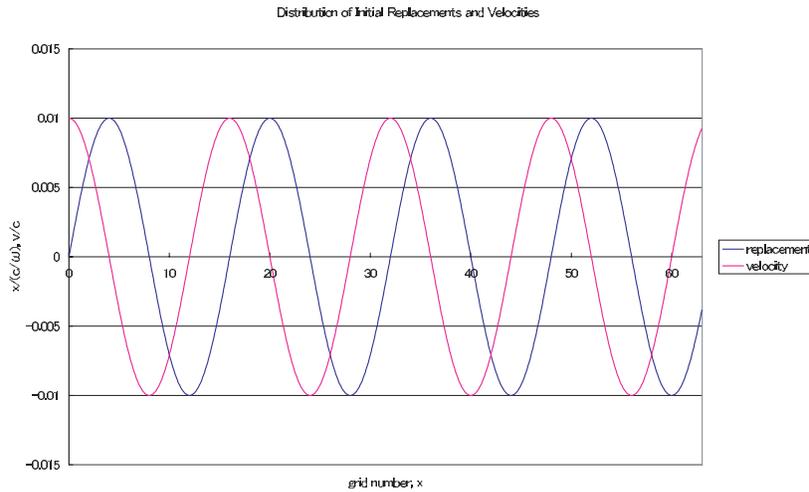


図 4.2: 粒子位置の変位と速度の初期値。

図 4.2 に示すような初期変位と初速度を粒子に与え、静電波 ($k \times E = 0$, k は波数ベクトル) の伝播をみることを考える。このとき、初期値 $x_{s,j}^0$ に対して (3.23) 式を用いて電荷密度を求めたところ、図 4.3 のようになった。図 4.3 は、1 格子あたり粒子数を 4 個とした場合の電荷密度分布である。理論値 () とシミュレーション (CIC 法) による値 () を比較している。この図から分かるように、サインカーブの極大点と極小点においてシミュレーションによる値が理論値から大きく外れている。このようなエラーは、波形を忠実に実現できていないだけでなく、高周波の波動成分を生む原因となり、第 3.5 節 (p.14) や第 3.6 節 (p.15) で述べる離散的なフーリエ変換を行う場合に致命的な障害 (aliasing) を引き起こす可能性がある。そのため、どうしてもこのようなエラーを取り除く必要がある。

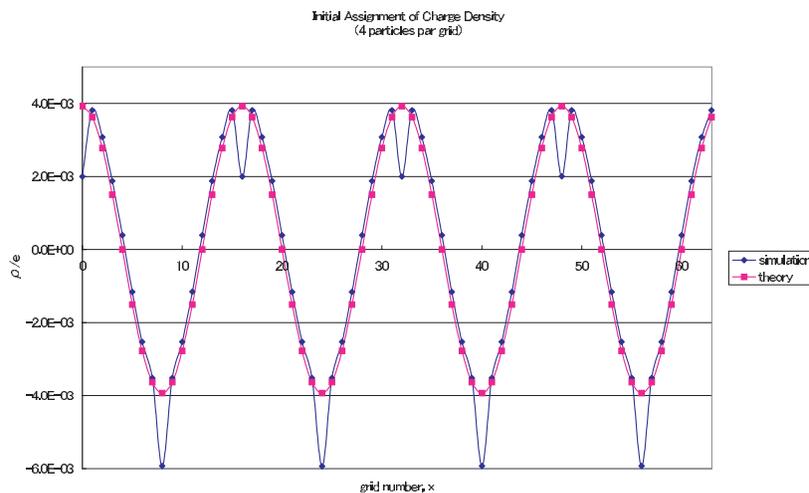


図 4.3: 粒子の初期値から求めた電荷密度分布。4 particles par grid.

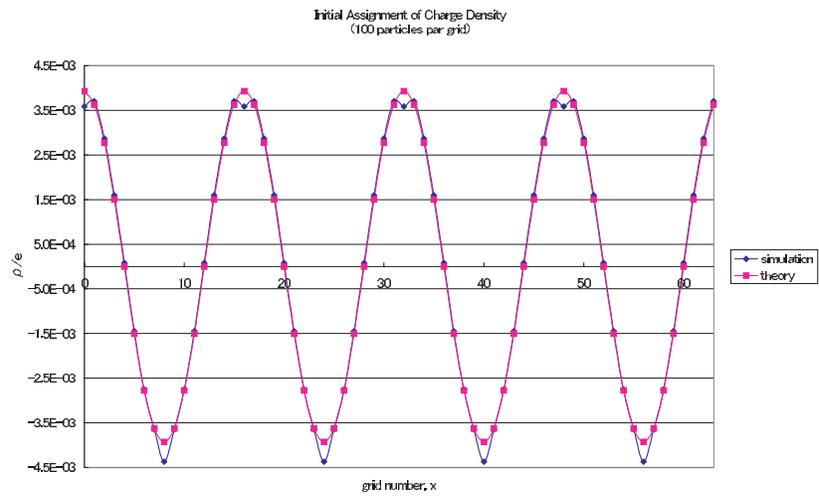


図 4.4: 粒子の初期値から求めた電荷密度分布。100 particles per grid.

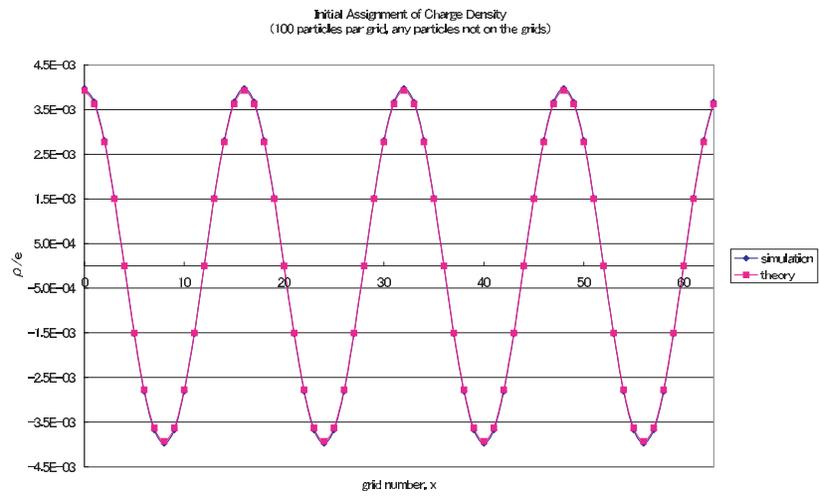


図 4.5: 粒子の初期値から求めた電荷密度分布。100 particles per grid, any particles are not on grids.

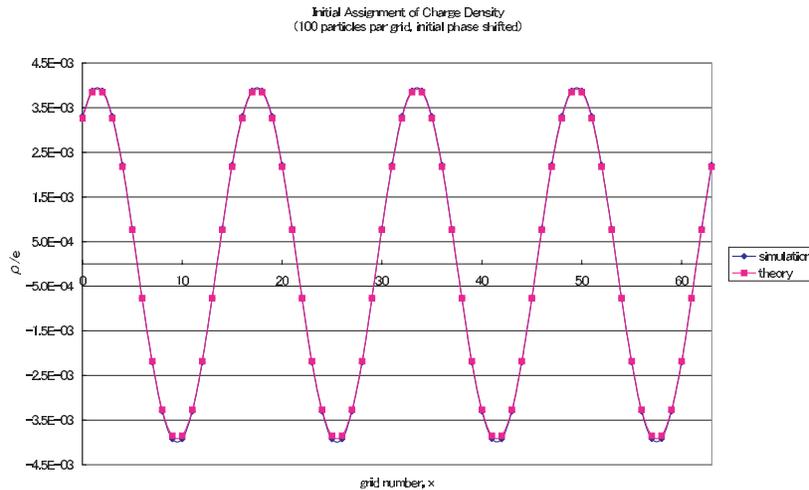


図 4.6: 粒子の初期値から求めた電荷密度分布。100 particles per grid, initial phase is shifted a little.

そこでまず、1 格子あたりの粒子の数を増やすことを考えた。図 4.4 は、1 格子あたりの粒子数を 100 個に増やした場合のものである。粒子数が 4 個の場合に比べるとかなり改善されているのがわかる。しかしながら、依然として極大点と極小点にへこみができている。また、できるだけ多くの格子点を扱おうとすると、1 つの格子に 100 個の粒子というのは少々苦しい。できればもう少し減らしたい。

このような思惑から、もう少し根本的な解決策を考えることが必要である。さまざまな試行錯誤から、誤差が生じるのは、

極大点、極小点が格子点上にあり、かつ、その格子点に粒子が存在しているとき

に最も大きくなることが分かった。そこで、粒子の初期分布を与える際に格子点上には配置しないようにした。その場合の電荷密度分布を図 4.5 に示す。極大点、極小点のへこみがなくなり、すべての格子点において理論値とシミュレーション値がよく一致しているのが分かる。これを初期値として与えても良いが、実際には極大点と極小点が格子点上にこないように波の位相を少しずらして与えた (図 4.6)。

波の位相は、数値計算の初期において最もきれいにそろっているから、時間 1 ステップあたりに系全体から生じる誤差は、数値計算の初期において最も大きいと考えられる。そのため、たとえ数ステップの後に波の極大点、極小点が格子点上にきたとしても、初期条件として与えるよりは誤差が小さくなると考えられる。

第5章 Test Simulation

この章では、テストシミュレーションとしてラングミュア波 (静電波) と正常波 (電磁波) をとりあげ、波が正しく伝播していることを述べる。

5.1 Langmuir Wave as an Example of Electrostatic Wave

5.1.1 Dispersion Relation

ラングミュア波の分散関係を求める。静電波の分散関係は縦誘電率 $\varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega)$ に対して、 $\varepsilon_L = 0$ とすることにより求められる。

形状因子 $S(x, y)$ であらわされる粒子に対する縦誘電率 (無次元化はしていない) は、

$$\varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega) = \left(1 - S^2(\mathbf{k}) \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{k^2} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 \mathbf{v} \quad (5.1)$$

ただし、プラズマは電子だけの1成分プラズマを考えた。ここで、 f_0 は平衡状態の電子の分布関数、 $\omega_p^2 = n_0 e^2 / \varepsilon_0 m_e$ は電子のプラズマ振動数、 $S(\mathbf{k})$ は、

$$S(\mathbf{k}) = \left[\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\frac{k_x \Delta x}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\frac{k_y \Delta y}{2}} \right]^2 \quad (5.2)$$

である。平衡状態の電子が Maxwell 分布をしているとして、

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_0}{(\sqrt{2\pi} v_{th})^3} \exp[-v^2 / 2v_{th}^2] \quad (5.3)$$

とする。 v_{th} は熱速度である。波の位相速度 (ω/k) が熱速度に比べて十分大きな場合、つまり、 $\omega/kv_{th} \gg 1$ のとき (5.1) 式右辺の積分は近似的に実行することが可能となり、

$$Re(\varepsilon_L) \approx 1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2}\right) \quad (5.4)$$

$\varepsilon_L = 0$ であることから、

$$\omega^2 \approx S^2 \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2 \quad (5.5)$$

となる。ここで、 $\omega \approx \omega_p$ を用いた。式 (5.5) がラングミュア波の分散関係である。

5.1.2 Initial Conditions

初期条件として与えるべき物理量は $(x_{sj}, v_{sj}, E_{l,m}, B_{l,m})$ と分散関係 (5.5) を満たす (k, ω) である (図 3.1 を参照)。

静電波の伝播方向を x 方向とする。つまり、

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

とする。このようにしても、一般性を失わない。その他の物理量も自己矛盾のないように与える。

$$\begin{aligned} B_{l,m} &= B_0 \hat{e}_x = \text{const.} \\ E_{l,m} &= E_0 \sin kx_l \hat{e}_x \\ v_{sj} &= v_s + \frac{q_s E_0}{m_s \omega} \cos(kx_{sj} + \omega \Delta t / 2) \hat{e}_x \\ x_{sj} &= -\frac{q_s E_0}{m_s \omega^2} \sin kx_j \hat{e}_x \end{aligned} \quad (5.7)$$

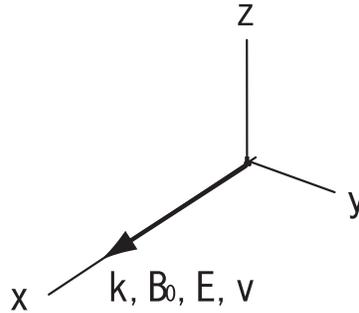


図 5.1: ラングミュア波の極性

v_s は、粒子のランダム運動にともなう速度である。上の式のうち速度と位置は運動方程式を満たすように与えた。図 5.2 に分布関数の初期値を示す。

5.1.3 Wave Propagation and Energy Conservation

この節では、実際に数値シミュレーションを行った結果として、波動の伝播とエネルギーの保存をみる。

図 5.3 はラングミュア波の E_x 成分の伝播を示す。横軸は格子点の番号 (0~63)、縦軸は時間 $t\omega_p$ (0~50) である。今、格子点間隔は 0.1 である。したがって、図 5.3 から波の位相速度は約 0.5 となり、初期条件として与えた位相速度 (図 5.2) と等しくなる。

図 5.4 は 4 つのエネルギー (電子の運動エネルギー、電場のエネルギー、磁場のエネルギー、全エネルギー) について、それぞれの大きさ (上図) と初期値との比 (下図) の時間変化を示す。電場と粒子の間で多少エネルギーのやり取りはあるが、系全体のエネルギーはよく保存していることが分かる。

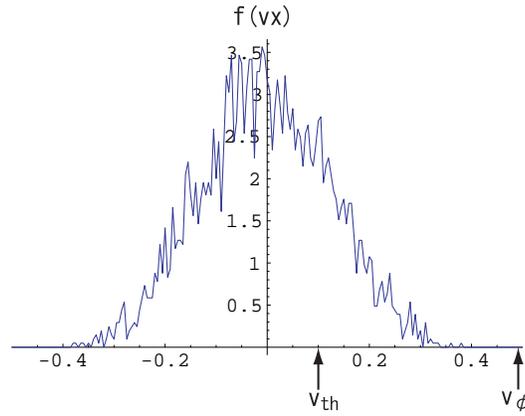


図 5.2: 電子の分布関数の初期値。 v_{th} は電子の熱速度、 v_ϕ は波動の位相速度。

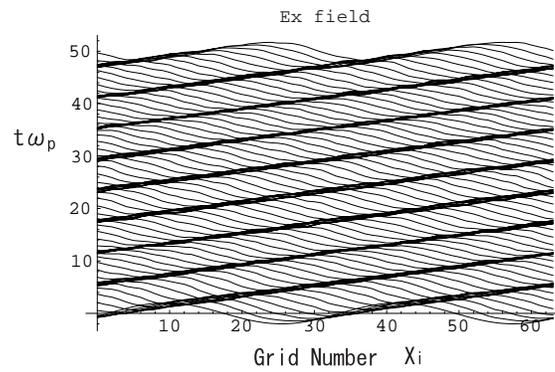


図 5.3: 電場の x 成分の伝播。

5.2 O-mode Wave as an Example of Electromagnetic Wave

5.2.1 Dispersion Relation

正常波の分散関係を求める。電磁波の分散関係式は横誘電率 $\varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega)$ に対して、 $\varepsilon_T = (ck/\omega)^2$ とすることにより求められる。

背景磁場の存在する一様プラズマ中で、横誘電率は以下のようにあらわされる。

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2} [Tr(\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)) - \varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega)] \quad (5.8)$$

ここで、 ε_L は縦誘電率、 Tr は行列の対角項の和をとることを示す。 ε は誘電率テンソルで、平衡状態の分布関数 f_0 が磁場に沿った方向の速度 v_{\parallel} と垂直な方向の速度 v_{\perp} の任意関数である場合、次のようにかける。

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \left(1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \mathbf{I} + \frac{e^2}{\varepsilon_0 \omega^2 m_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{[(n\omega_{ce}/v_{\perp})(\partial f_0/\partial v_{\perp}) + k_{\parallel} \partial f_0/\partial v_{\parallel}] \Lambda}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{ce}} d^2 v \quad (5.9)$$

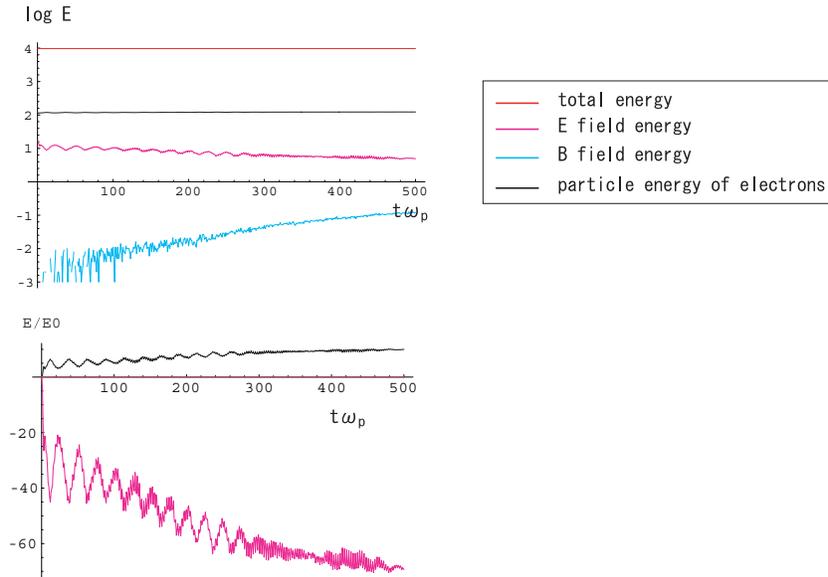


図 5.4: 上図:エネルギーの対数值 ($\log E$)。下図:初期エネルギーとの比 (%)。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (n\omega_{ce}/k_{\perp})^2 J_n^2 & iv_{\perp}(n\omega_{ce}/k_{\perp})J'_n J_n & v_{\parallel}(n\omega_{ce}/k_{\perp})J_n^2 \\ -iv_{\perp}(n\omega_{ce}/k_{\perp})J'_n J_n & v_{\perp}^2 (J'_n)^2 & -iv_{\parallel}v_{\perp}J'_n J_n \\ v_{\parallel}(n\omega_{ce}/k_{\perp})J_n^2 & iv_{\parallel}v_{\perp}J'_n J_n & v_{\parallel}^2 J_n^2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $J_n = J_n(\lambda)$ は n 次のベッセル関数で、 $\lambda = k_{\perp}v_{\perp}/\omega_{ce}$ である。また、 $J'_n = dJ_n(\lambda)/d\lambda$ である。 ω_{ce} は電子のサイクロトロン振動数、 $\int d^2v = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp}$ 。

平衡状態の分布関数は前節と同様、Maxwell 分布を仮定する。

$$f_0(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{n_0}{(\sqrt{2\pi}v_{th})^3} \exp[-(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2v_{th}^2] \quad (5.10)$$

電磁波のうち磁場に垂直に伝播するものだけを考える ($k_{\parallel} \rightarrow 0$)。このとき、(5.9) 式の積分が近似的に実行できて、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\approx 1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_n \frac{n^2}{\lambda} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{ce}} I_n e^{-\lambda} \\ \varepsilon_{yy} &\approx 1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\omega_{ce}} \left[\left(\frac{n^2}{\lambda} + 2\lambda \right) I_n - 2\lambda I'_n \right] e^{-\lambda} \\ \varepsilon_{zz} &\approx 1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\omega_{ce}} I_n e^{-\lambda} \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &\approx -iS^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_n \frac{n\omega}{\omega - n\omega_{ce}} (I'_n - I_n) e^{-\lambda} \\ \varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{zx} &\approx 0, \quad \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} \approx 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる。ここで、 $I_n = I_n(\lambda)$ は n 次の変形ベッセル関数、 $I'_n = dI_n(\lambda)/d\lambda$ である。したがって

分散関係式は、

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

この式から、磁場に垂直に伝播する電磁波には2つの固有モードがあることが分かる。1つは電場 (E_x, E_y) の極性を持つものであり、もう1つは電場 E_z の極性を持つものである。このうち正常波とよばれるのは後者のモードであり、波の波長が電子のサイクロトロン半径に比べて十分大きい場合は、

$$1 - S^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 0 \quad (5.13)$$

と近似できる。

5.2.2 Initial Conditions

背景磁場の方向を z 方向、波動の伝播方向を x 方向とする。

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z, \quad \mathbf{k} = k \hat{e}_x \quad (5.14)$$

ω は (5.13) 式からもとめる。その他の物理量も以下のように自己矛盾のないように与える。

$$\begin{aligned} E_{l,m} &= E_0 \sin kx_l \hat{e}_z \\ B_{l,m} &= B_0 \hat{e}_z - \frac{kE_0}{\omega} \sin kx_l \hat{e}_y \\ v_{sj} &= \mathbf{v}_s + \frac{q_s E_0}{m_s \omega} \cos(kx_{sj} + \omega \Delta t / 2) \hat{e}_z \\ x_{sj} &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

これらの式で、 v_{sj} と x_{sj} は運動方程式を満たすように与えた。ただし、変動成分の2次以上の項は無視した。

5.2.3 Wave Propagation and Energy Conservation

図 5.6 は正常波の E_z 成分および B_y 成分の伝播を示す。縦軸と横軸の設定はラングミュア波の場合 (図 5.3) と同じである。ただし格子点間隔は 0.2 とした。波の位相速度 (ω/k) は初期条件では約 1.4 としている。図 5.6 から、 E_z も B_y もうまく伝播していることが分かる。

図 5.7 は図 5.4 と同様、4つのエネルギーについてそれぞれの大きさ (上図) と初期値との比 (下図) の時間変化を示したものである。計算の初期において粒子と電場の間でエネルギーのやり取りが大きいのは、初期条件の整合性が微妙に取れていないためであると考えられる。全エネルギーの保存はよく成り立っているのでプログラム上の問題は無いと考えられる。

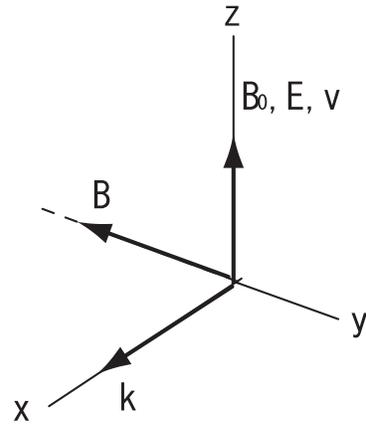


図 5.5: 正常波の極性

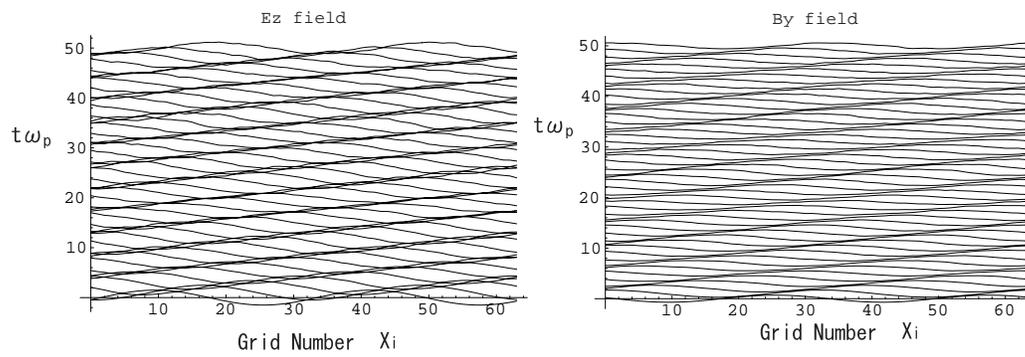


図 5.6: 電場 z 成分と磁場 y 成分の伝播。

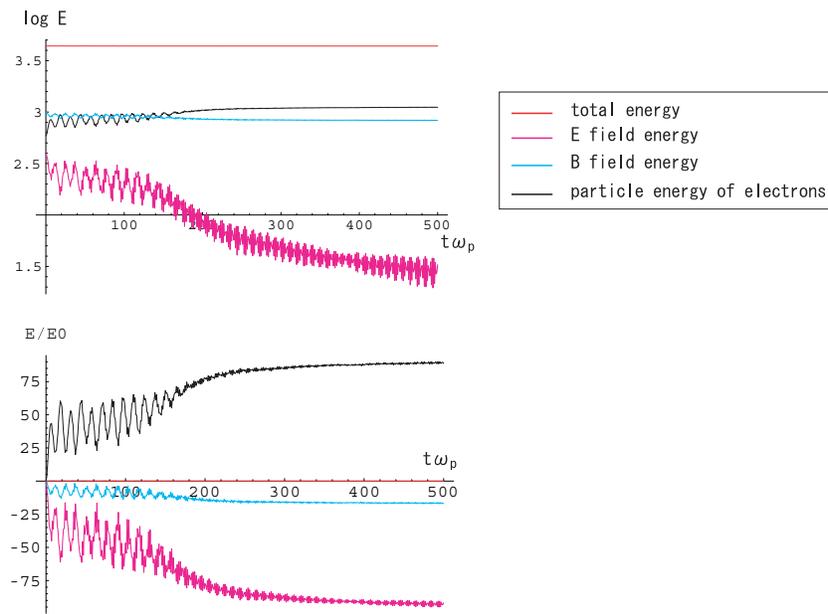


図 5.7: 上図:エネルギーの対数值 ($\log E$)。下図:初期エネルギーとの比 (%)。

第6章 Unstable Waves Excited by Cross-Field Ion Beam

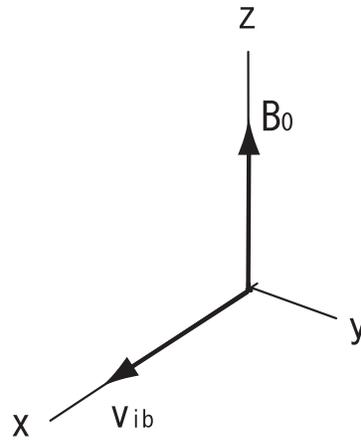


図 6.1: 磁場を横切るビーム

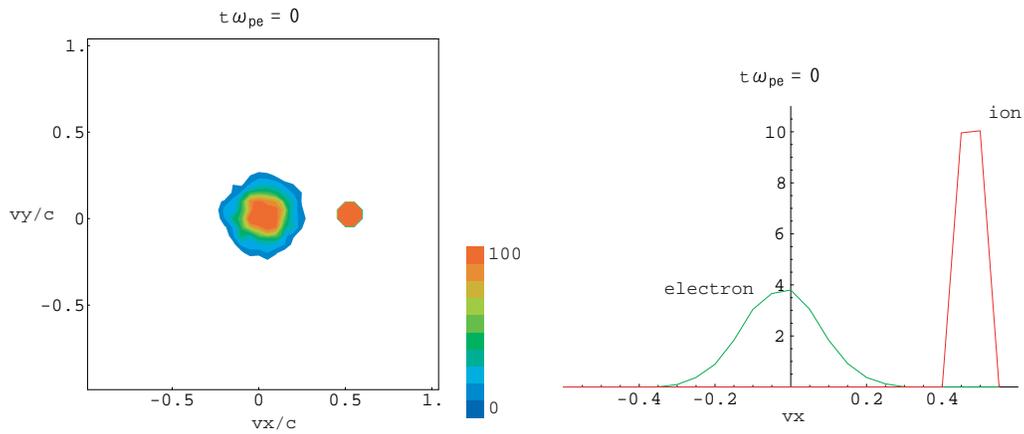


図 6.2: 電子とイオンの初期分布関数。 $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.$, $T_e/T_i = 1.$, $\beta_i = 0.02$, $m_i/m_e = 100$, $V_b/V_A = 5.$ ($V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}$).

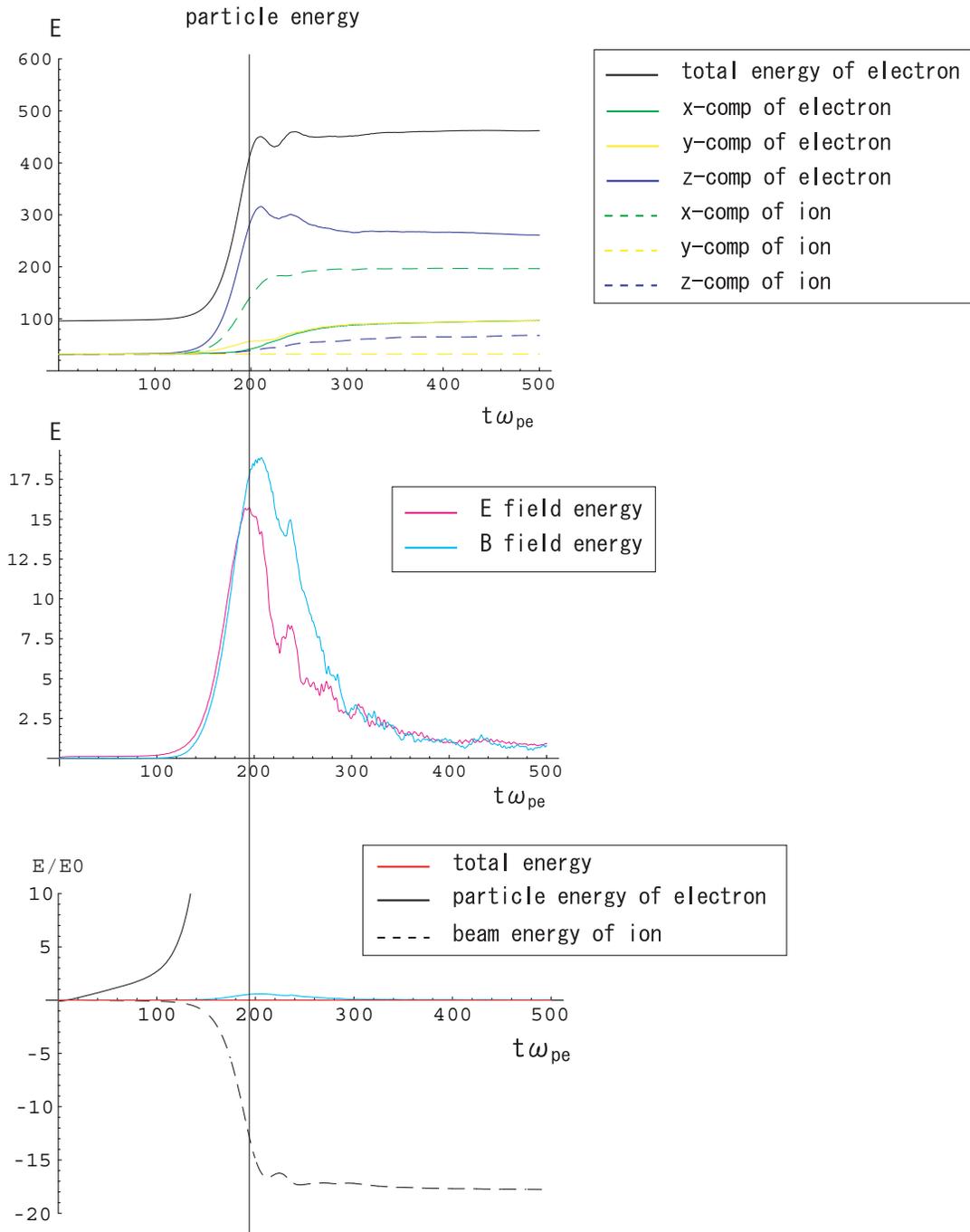


図 6.3: 上から粒子のエネルギー、場のエネルギー、初期エネルギーとの比 (%). $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.$, $T_e/T_i = 1.$, $\beta_i = 0.02$, $m_i/m_e = 100$, $V_b/V_A = 1$. ($V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}$).

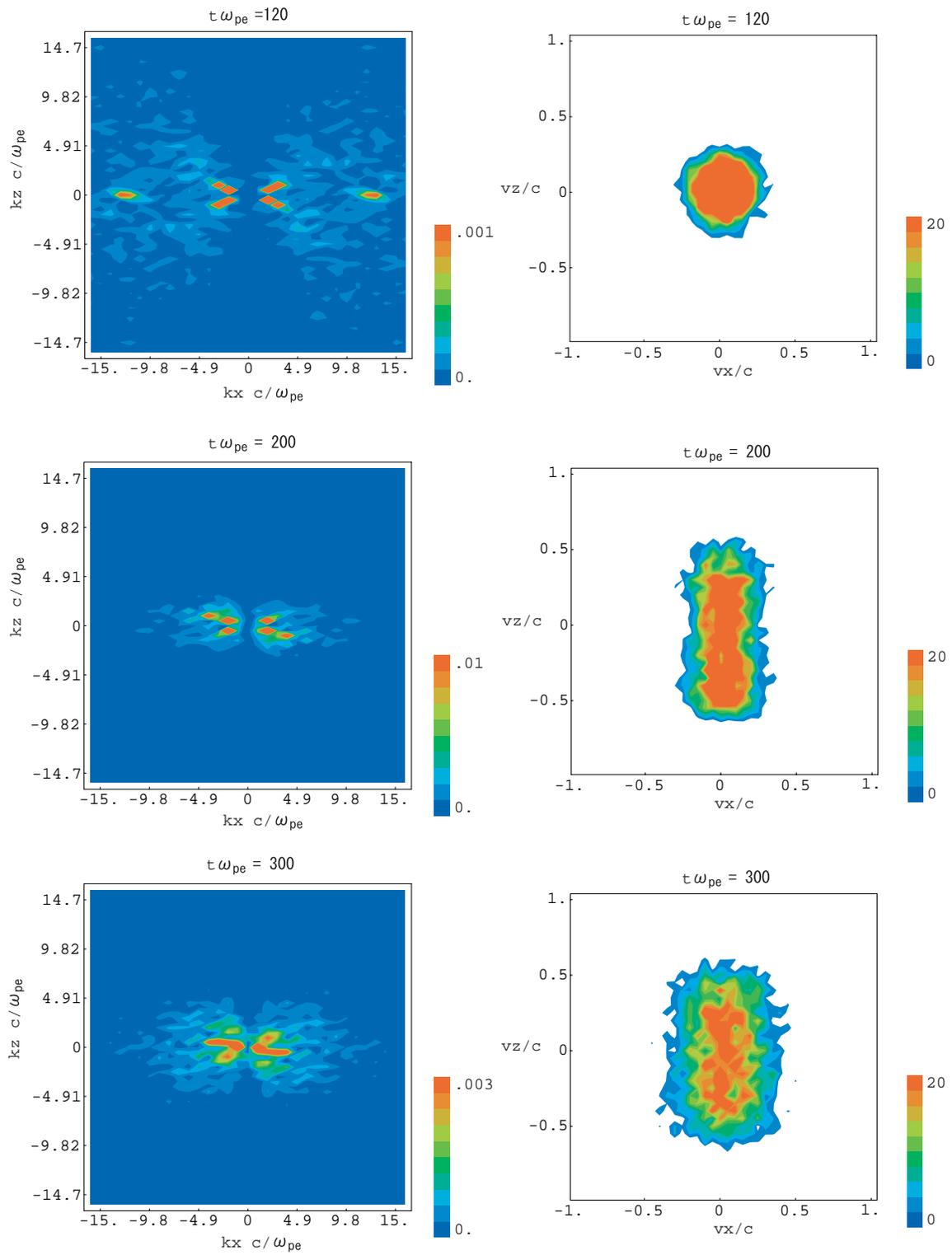


図 6.4: 波数スペクトル (左図) と電子の分布関数 (右図)。 $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.$, $T_e/T_i = 1.$, $\beta_i = 0.02$, $m_i/m_e = 100$, $V_b/V_A = 1.$ ($V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}$).

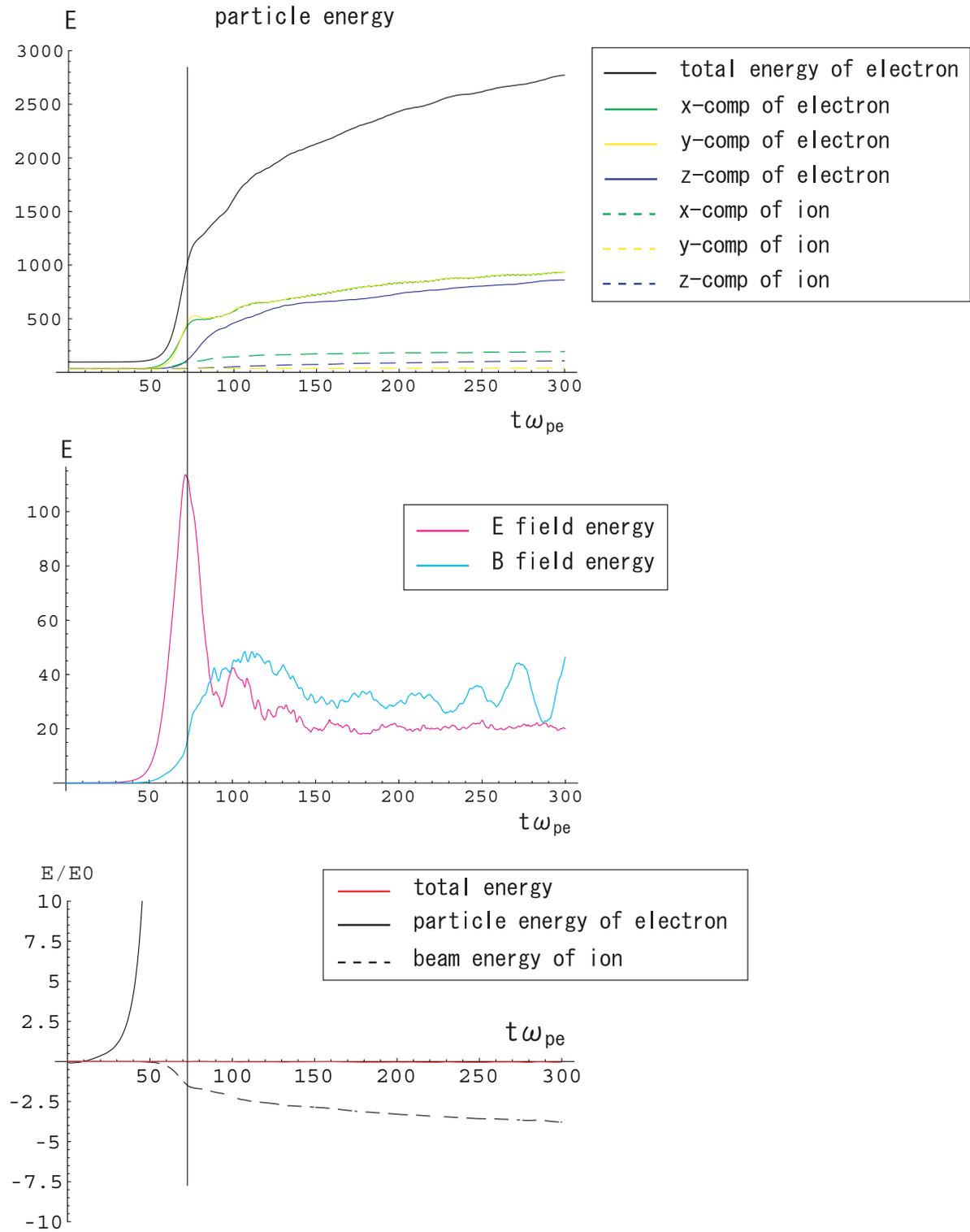


図 6.5: 上から粒子のエネルギー、場のエネルギー、初期エネルギーとの比 (%). $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.$, $T_e/T_i = 1.$, $\beta_i = 0.02$, $m_i/m_e = 100$, $V_b/V_A = 5$. ($V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}$).

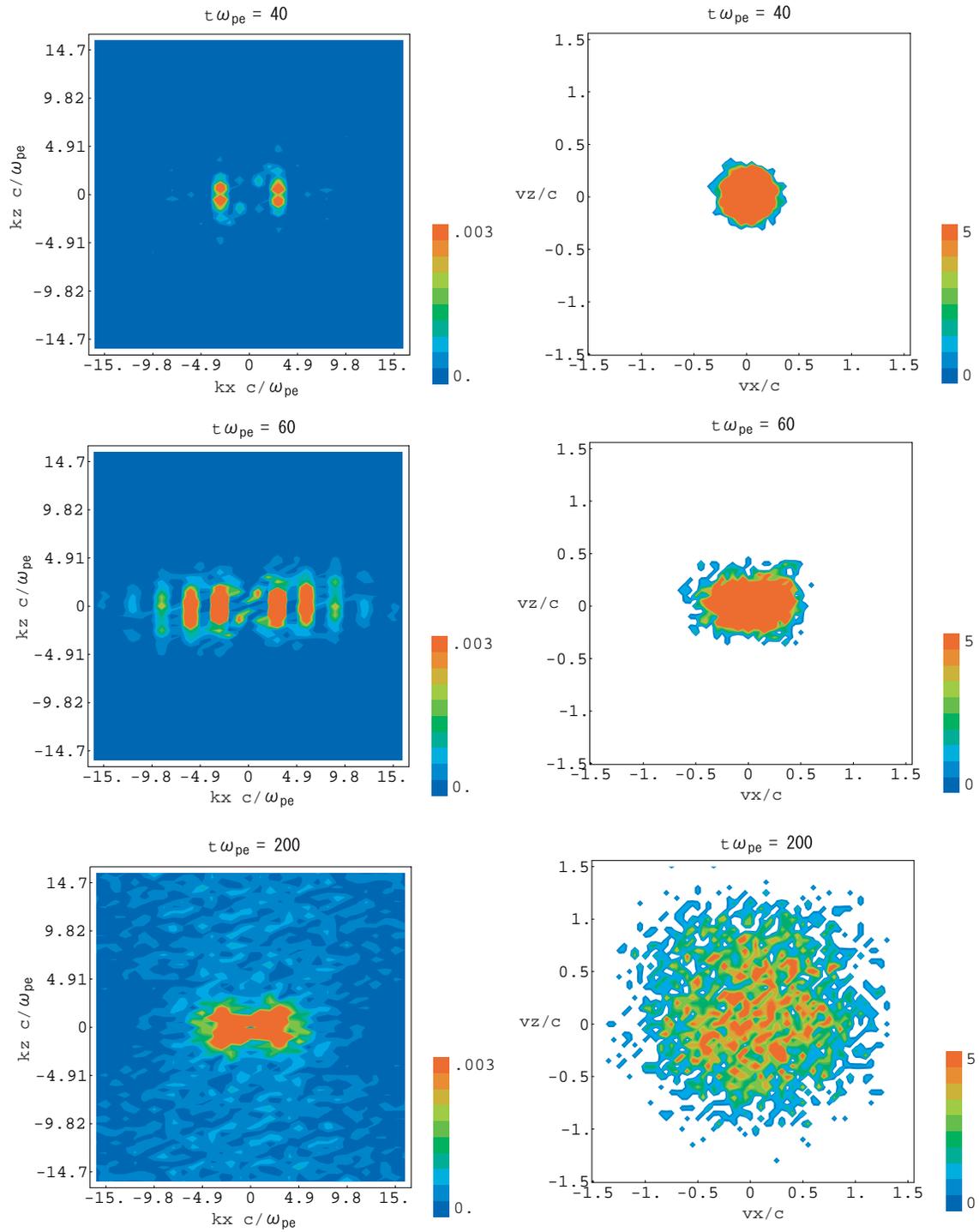


図 6.6: 波数スペクトル (左図) と電子の分布関数 (右図)。 $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 1.$, $T_e/T_i = 1.$, $\beta_i = 0.02$, $m_i/m_e = 100$, $V_b/V_A = 5$. ($V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}$).

References

- [1] Birdsall, C. K. and A. B. Langdon, Plasma physics via computer simulation, Institute of Physics Publishing, 1991.
- [2] Shinohara, I., T. Nagai, M. Fujimoto, T. Terasawa, T. Mukai, K. Tsuruda, and T. Yamamoto, Low-frequency electromagnetic turbulence observed near the substorm onset site, J. Geophys. Res., 103, 20,365, 1998.
- [3] Sonnerup, B. U. O., Magnetic field reconnection, in *Solar System Plasma Physics* edited by L. J. Lanzerotti, C. F. Kennel, and E. N. Parker, **3**, 45-108, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [4] 田中基彦、西川恭治: 高温プラズマの物理学, 丸善, 1991.
- [5] William, H. P., A. T. Saul, T. V. William, P. F. Brian, Numerical recipes in Fortran 90 2nd ed., Cambridge University Press, 1996.

Contents

第 1 章	Introduction	1
1.1	Simulation Codes	2
第 2 章	Equations Used in the Electromagnetic Particle Code	5
2.1	Fundamental Equations	5
2.2	Normalization	6
第 3 章	Procedure of the Simulation	9
3.1	Overview	9
3.2	Boundary Condition and Initial Conditions	10
3.3	Momentum Equations	11
3.4	Charge Assignment	13
3.5	Poisson's Equation	14
3.6	Faraday's Law and Ampère's Law	15
第 4 章	Characteristic of the CIC Method	17
4.1	Wave Number Dependence of Shape Factor $S(\boldsymbol{x})$	17
4.2	Fault in CIC Method	17
第 5 章	Test Simulation	21
5.1	Langmuir Wave as an Example of Electrostatic Wave	21
5.1.1	Dispersion Relation	21
5.1.2	Initial Conditions	22
5.1.3	Wave Propagation and Energy Conservation	22
5.2	O-mode Wave as an Example of Electromagnetic Wave	23
5.2.1	Dispersion Relation	23
5.2.2	Initial Conditions	25
5.2.3	Wave Propagation and Energy Conservation	25
第 6 章	Unstable Waves Excited by Cross-Field Ion Beam	29