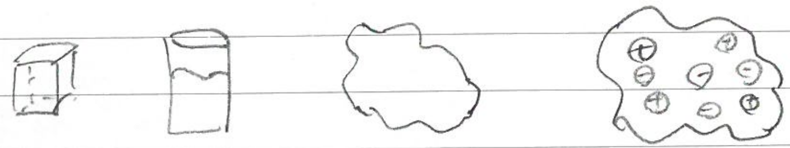
No. 1
Date: 2017.10.2

THE PHYSICS OF FLUIDS AND PLASMAS

14 Basic magnetohydrodynamics

- 宇宙空間のガスはほとんどがプラズマ → 円盤ガスもプラズマ
- プラズマ中のイオンは磁場と作用する
  → 円盤のアウトフローや磁気回転不安定など
- プラズマを流体とみなして磁場との作用を記述する
  → が Magnetohydrodynamics (MHD)
- 原始星のアウトフローや、原始惑星系円盤のふるまいを理解するために、MHDの基礎を理解するのが目標

そもそも、プラズマとは…



固体　液体　気体　プラズマ(plasma)

三態

第4の状態とかいわれる
ガス(の一部)が電離している状態

14.1 The fundamental equations

- 分子(原子)間の衝突頻度が高いとき、ガスは流体とみなせる。
- 電荷の電離が無視できる

⇒ MHDが適応できる。

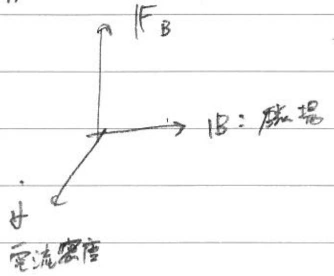
MHDでは、流体の式に磁場の項が入る

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (14.1)$$

- Navier - Storkes + 磁場の項

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \underbrace{\frac{1}{\rho c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}}_{\text{ローレンツ力}} + \nu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (14.2)$$



Maxwell 方程式 (in cgs unit)

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\ \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad (13.53)$$

非相対論的なとき、$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$の項はおとせる

(13.53) を (14.2) に代入

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (14.3)$$

ベクトル解析の公式

$$(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) \qquad (14.4)$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{4\pi\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (14.5)$$

各項の意味

$\nabla\frac{B^2}{8\pi}$ … 磁気圧

$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ … 磁力線に沿った張力

これをもう少し詳しく

No. 3
Date: 2017、10、2

$$(\mathbb{B}\cdot\nabla)\mathbb{B} = (\mathbb{B}\cdot\partial_x B_x)\mathbb{e}_x + (\mathbb{B}\cdot\partial_y B_y)\mathbb{e}_y + (\mathbb{B}\cdot\partial_z B_z)\mathbb{e}_z$$

より、別の書き方をすると

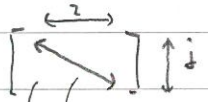
$$\left[\frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\mathbb{B})\times\mathbb{B}\right]_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{B_iB_j}{4\pi}\right) \quad (14.6)$$

※ $\frac{\partial B_j}{\partial x_i} = \nabla\cdot\mathbb{B} = 0$

となる。よって (14.5) も次のように書ける

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_j}(P_{ij} + M_{ij}) \quad (14.7)$$

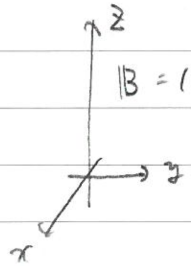
$$M_{ij} = \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{B_iB_j}{4\pi} \quad (14.8)$$

$P_{ij} =$ 

対角成分 … 圧力
それ以外 … 粘性応力

M_{ij} も同じように、対角成分の $\frac{B^2}{8\pi}$ は圧力とみなせる.
残りの項の意味は、次のように考えると分かる.
磁場の向きに z 軸をとると

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} B^2/8\pi & 0 & 0 \\ 0 & B^2/8\pi & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/8\pi \end{pmatrix}$$



$\mathbb{B} = (0, 0, B)$

となる。より丁寧に書くと

$$M_{xx} = \frac{B^2}{8\pi}$$
$$M_{yy} = \frac{B^2}{8\pi}$$
$$M_{zz} = \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B^2}{4\pi}$$

圧力
(等方的)

張力
磁場の向きに沿った

臺灣大學

○ エネルギーの式

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} + p\nabla\cdot v = -L \qquad (4.13)$$

ϵ：単位質量 単位時間あたりの内部エネルギー

$-L$：単位体積あたりの熱ゲイン率

（Lは熱ロス率）

$-L$の中に、熱輻射 $\nabla\cdot(K\nabla T)$ に加えて Ohmic heating の項 j^2/σ が加わる。σは導電率（conductivity）

↳ 意味は抵抗によるエネルギー

$$W = V\times I = I^2R \leftrightarrow j^2/\sigma$$

○ induction equation（誘導方程式）

もう1つ、磁場のふるまいを記述する式が必要

Maxwell 方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -c\nabla\times E$$

(13.36) $j = \sigma\left(E + \frac{v}{c}\times B\right)$

(13.53) $\nabla\times B = \frac{4\pi}{c}j$

に、

$$E = \frac{c}{4\pi\sigma}\nabla\times B - \frac{v}{c}\times B \qquad (13.54)$$

より

を代入すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) + \lambda\nabla^2 B \qquad (14.10)$$

$\lambda = c^2/4\pi\sigma$ (14.11) from $\nabla\times(\nabla\times B) = \nabla(\nabla\cdot B) - \nabla^2 B$, $\nabla\cdot B = 0$

：magnetic diffusivity

磁気拡散係数

ただし、σは空間的に一様と仮定。

まとめると

MHD Eq.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \mathbf{v}) = 0 & (14.1) \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla\left(p + \dfrac{B^2}{8\pi}\right) + \dfrac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{4\pi\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{v} & (14.5) \\ \rho\dfrac{dE}{dt} + p\nabla\cdot\mathbf{v} = -L & (4.13) \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \lambda\nabla^2\mathbf{B} & (14.10) \end{cases}$$

14.1 … 質量保存 × 1			変数	
14.5 … 運動方程式 × 3			$\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{v}(x)$	… 6つ
4.13 … エネルギー保存 × 1		⟺	E, P	… 2つ
14.10 … 磁場の時間変化 × 3				
計 8本			計 8つ	

hydrodynamic model との違い

1. Navier-Storkes に磁場による力の項が加わる.
2. Ohmic heating の項が $-L$ に加わる.
3. induction equation

14.2 Some consequences of the induction equation

induction equation のふるまいを見る.

(14.10) は渦度の式 (5.12) と同じ形をしている.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\omega) + \nu\nabla^2\omega \qquad (5.12)$$

ν: 動粘性係数

ω: 渦度 (vorticity)

V, L をそれぞれ系の典型的な速度. 長さ とすると

No. 6
Date: 2017、10、2 臺灣大學

	渦度の式	induction eq.
	(5.12)	(14.10)
たとえ第一項	vw/L	vB/L
〃 二項	$\nu w/L^2$	$\lambda B/L^2$
第一項/第二項	Lv/ν	Lv/B
	Reynolds数	magnetic Reynolds数

$$R_M = \frac{Lv}{\lambda} \qquad (14.12)$$

R_Mは長さに比例 ⇨ 天体スケールでのR_M > 実験室規模でのR_M

10^4 Kの水素プラズマを考える.

(13.27)から、そのresistivityを求められる.

それをつかうと、 $\lambda = \frac{c^2\eta}{4\pi} \approx 10^7 \ cm^2 \cdot s^{-1}$ (14.13)

η: resistivity $\quad \eta = \frac{1}{\sigma}$

実験室 … $L \approx 10^2$ cm、$v \approx 10 \ cm \cdot s^{-1}$ とすると

$R_M \approx 10^{-4} \ll 1$

宇宙 … $L \approx 10^8$ cm、$v \approx 10^5 \ cm \cdot s^{-1}$

$R_M \approx 10^6 \gg 1$ $\qquad$ 1 au $\approx 1.5 \times 10^{13}$ cm

よって(14.10)は、大ざっぱに次のようにかける. $\qquad$ 10^8 cmは太陽表面の対流のセルを考えてる.

実験室 : $\frac{\partial B}{\partial t} \approx \lambda \nabla^2 B$ (14.14)

宇宙 : $\frac{\partial B}{\partial t} \approx \nabla \times (v \times B)$ (14.15)

(※ めちゃくちゃ雑な近似であることに注意
ふつうにもう片方の項も大事だったりする.
ここでは、あくまで式のふるまいを見たいだけ.)

大事なことは、磁場は、実験室規模と天体規模ではふるまいが大きくちがうということ!

(14.14) について

(14.14) は拡散方程式の形になっている

→ 磁場は自然に散逸

実験室スケールのプラズマ内では

電源がない電流は、オーム散逸できえていくので

対応して磁場もきえる $\left(\frac{\partial B}{\partial t} \propto \eta \right)$

(14.15) について

conductivity σ が無限大のとき (resistivity η が 0 のとき)

$\lambda \to 0$ より、(14.10) は次のように書ける.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (14.16)$$

: ideal MHD

任意のベクトル $\mathbf{Q}$ に対して、次のような関係がある.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q})$$

を満たすとき、$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{Q}\, dS = 0$

よって、今、

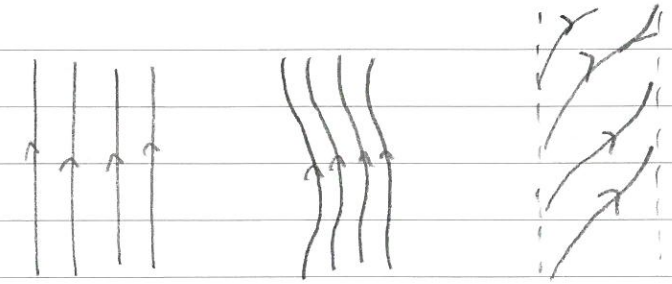
$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot dS = 0 \qquad (14.17)$$

Alfven's theorem of flux-freezing

流体の表面全体での、$\mathbf{B}$ の積分は一定である

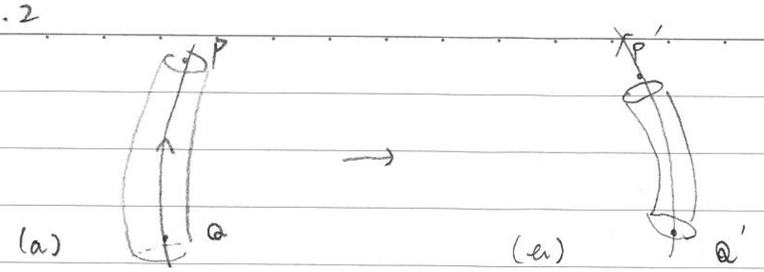
⇨ 磁場は流体と共に運動する

Fig. 14.1



(a) (b) (c)

Fig. 14.2



流体素片 Q. P.

(a) のように、P, Q をつらぬく磁場に沿った円筒を考える。
このとき、表面積は 0。
時間がたって (b) のようになると (Q→Q'、P→P')
円筒の形もかわる。(14.17) を満たすには、やはり流体にあわせて磁場もうごく必要がある。

つまり、R_M が大きい宇宙空間では、(14.15) より
磁場は凍結される。

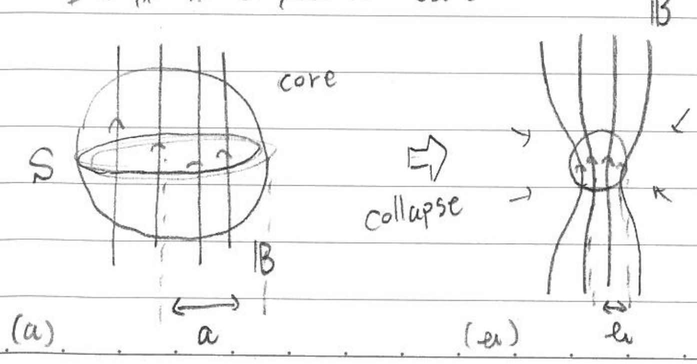
◎ まとめ。

induction equation のふるまい (磁場のふるまい)

1. 磁場の拡散 (Ohmic dissipation)
2. 磁場の凍結

特に、ideal MHD では拡散は無視でき、凍結のみが重要な性質となる。

・重力崩壊と磁場の強さ



No. 9
Date: 2017.10.2

コアが collapse することを考える $\left((a) \to (b) \right)$
コアの断面積をそれぞれ S、S'
磁場の強さを B、B'
コアの半径を a、b とする。
磁場の凍結より、断面積をつらぬく磁場の総量は
変化しない。よって、

$$\pi b^2 B' = \pi a^2 B$$

$$B' = B \left(\frac{a}{b} \right)^2 > B$$

ちなみに B は
$[wb \cdot m^{-2}]$
の次元で
単位面積あたりの
大きさの量

重力収縮すると磁場は強くなる

中性子星の磁場 … 10^{12} G と思われてる
どこからくるか？
太陽 like な星 … 半径 10^{11} cm
極の磁場 10 G
中性子星の半径 … 10^6 cm
よって、収縮を考えると $10^5 \times 10^5 = 10^{10}$ のオーダーで断面積は
小さくなる。
→ 中性子星の磁場の強さは $10\,G \times 10^{10} = 10^{11}$ G