ダスト粒子間接触相互作用：接線応力

● 前回やったこと：法線応力

はね返るか　くっつくか

$E_{stick} = 0.09 F_c \delta_c$

E_{stick}（音波）$= 0.4 F_c \delta_c$

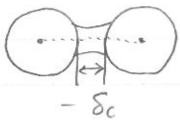
ひきはがすのに必要なエネルギー

$E_{break} = 1.54 F_c \delta_c$

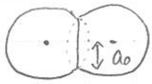
E_{break}（音波）$= 1.8 F_c \delta_c$

F_c：ひきはがすのに必要な力　　$F_c = 3\pi \gamma R$

δ_c：切れる瞬間　　$\delta_c = \dfrac{1}{2} \dfrac{a_0^2}{6^{\frac{1}{3}} R}$



a_0：くっついている平衡状態での接触面半径　　$a_0 = \left(\dfrac{9\pi \gamma R^2}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}}$



R：2つのモノマー半径 R_1, R_2 の換算半径　　$R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

E^*：2つのモノマーのヤング率 E_1, E_2 とポアソン比 ν_1, ν_2 を用いて

$$E^* = \left[\frac{(1-\nu_1)^2}{E_1} + \frac{(1-\nu_2)^2}{E_2} \right]^{-1}$$

γ：単位表面積あたりのエネルギー γ_1, γ_2 を用いて　$\gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$

H_2O 氷のとき（音波なし）

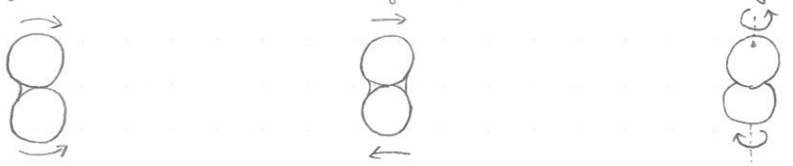
$$v_{stick} \sim 2 \times \left(\frac{R_1}{0.1 \mu m} \right)^{-\frac{5}{6}} [m/s]$$

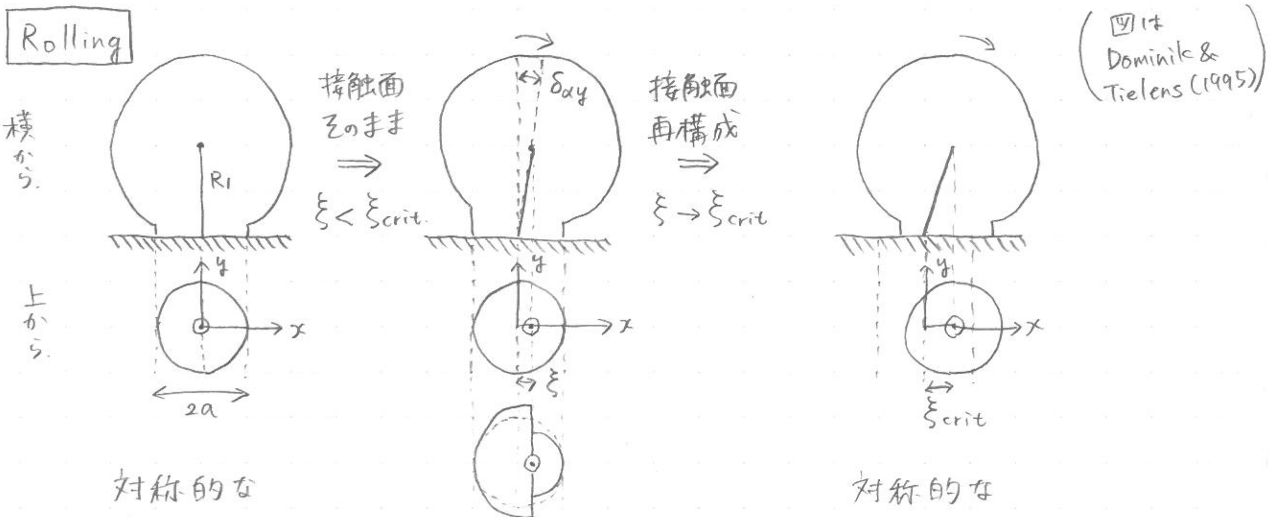
$$v_{break} \sim 6 \times \left(\frac{R_1}{0.1 \mu m} \right)^{-\frac{5}{6}} [m/s]$$

$\left(v \propto \gamma^{\frac{5}{6}} R_1^{-\frac{5}{6}} E^{*-\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{1}{2}} \right)$　　ρ：物質密度

● 接線応力

Rolling (回転)　　Sliding (滑り)　　Twisting (よじれ)





対称的な圧力分布

非対称的な圧力分布
戻ろうとする (← 向きの) トルクを受ける

対称的な圧力分布
トルクが消え
弾性エネルギーが散逸
(転がり摩擦)

$\xi < \xi_{crit}$ のとき　　$\xi = R_1 \delta_{\alpha y}$

回転方向と逆向きなトルク　$M = 4F_c \left(\dfrac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \xi \sim 4F_c \xi$

$\xi \to \xi_{crit}$ のとき 転がり始める

そのために必要なトルク　$M_{y,crit} = 4F_c \left(\dfrac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \xi_{crit} \sim 4F_c \xi_{crit}$

ここまでで蓄積した弾性エネルギー　$e_{roll} = M_{y,crit} \cdot \dfrac{\xi_{crit}}{R_1} = \dfrac{4F_c \xi_{crit}^2}{R_1}$

$R_1 = 2R$ なので　$e_{roll} = \dfrac{2F_c \xi_{crit}^2}{R} = 6\pi \gamma \xi_{crit}^2$

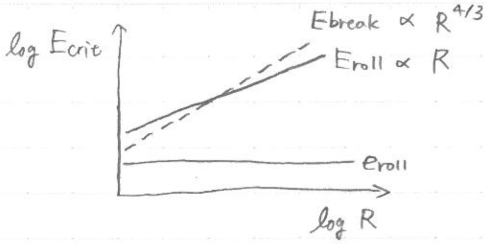
90° 転がるのに必要なエネルギー ($\frac{\pi}{2} R_1$)　$E_{roll} = e_{roll} \dfrac{\pi R}{\xi_{crit}} = 6\pi^2 \gamma R \xi_{crit}$

ξ は原子スケールなので $\xi_{crit} \sim 1\,\mathring{A}$

$e_{roll} \ll E_{break}$: 粒子接触を断ち切ることなく回転し始めるのは容易

$E_{roll} \sim E_{break}$: 粒子が接触したまま目に見えて長い距離転がるのは難しい

$$\left(\frac{E_{roll}}{E_{break}} \sim \frac{\xi_{crit}}{\delta_c} \sim 1 \right)$$



Domink & Tielens (1997) より

$\boxed{\text{Sliding}}$ 初めは弾性的にふるまう ⇒ 力が閾値に達すると不可逆的に動く

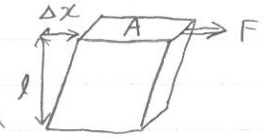
まだ滑らないうちは 摩擦力 $F_x = -8aG^* \delta_x$

δ_x : 接線方向変位

$$G^* = \left[\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right]^{-1}$$

G_1, G_2 : せん断弾性率 → 5/29の参考資料（ランダウ リフシッツ）P5 の μ : 剛性率 のこと

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$



$$G_1 \equiv \frac{F/A}{\Delta x / l} = \frac{Fl}{A\Delta x}$$

閾値 F_{fric} : 原子スケールの段差による摩擦力と 物質表面の原子間相互作用による平均力摩擦力

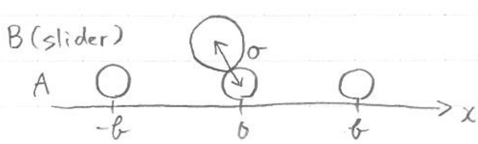
$$F_{fric} = \frac{Ga^2}{2\pi} + \begin{cases} 0 & \text{（シリケイト, グラファイト …）} \\ \frac{1}{3}F - \frac{\pi a^2}{3} P_{crit} & \text{（氷, 金属 …）} \end{cases}$$

$$P_{crit} = \frac{2.67}{\pi} \frac{b^3}{\sigma^3} G - \frac{24.72}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma$$

F : 法線方向の力

$G = \left[G_1^{-1} + G_2^{-1} \right]^{-1}$

P_{crit} : 臨界圧力（物質による）



$F_x = F_{fric}$ となるときの変位を δ_x^c とすると（シリケイトやグラファイトで $\delta_x^c \simeq 0.03a$）

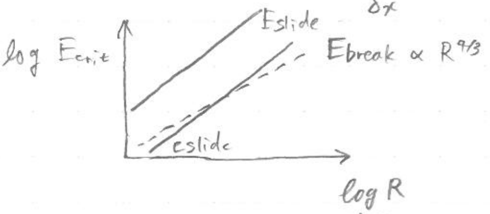
δ_x^c を越えると滑る

滑り始めるのに必要な最低エネルギーは

$$e_{slide} = \frac{1}{2} \delta_x^c F_{fric} = \frac{1}{16aG^*} F_{fric}^2 = 4aG^* {\delta_x^c}^2$$

十分な距離（πR）滑るために必要なエネルギー

$$E_{slide} = e_{slide}\frac{\pi R}{\delta_x^c} = \frac{1}{2}\pi R F_{fric} = 4\pi R a G^* \delta_x^c$$



$$\left(\begin{array}{llll} a \sim a_0 \text{ とすると.} & F_{fric} \propto a^2 & \propto & R^{\frac{4}{3}} \\ e_{slide} & \propto a^{-1} F_{fric}{}^2 & \propto & R^2 \\ E_{slide} & \propto R\, F_{fric} & \propto & R^{\frac{7}{3}} \end{array}\right.$$

$e_{slide} \simeq E_{break}$ ：接触を保ったまま滑り始めるのも難しい

$E_{slide} \gg E_{break}$ ：滑りによる構造変化も難しい

$\boxed{\text{Twisting}}$ まだ滑らない（よじれない）うちは 抵抗モーメント M_z

$$M_z = -\frac{16}{3} G a^3 \delta_{\alpha z}$$

$\delta_{\alpha z}$ ：よじれ角

閾値 M_z^{slide} ：Sliding と同じように考えられる

$$M_z^{slide} = \frac{Ga^3}{3\pi} + \begin{cases} 0 & \text{（シリケイト…）} \\ \frac{1}{3}F_c a_0\left[\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}\right] - \frac{2}{9}\pi a^3 p_{crit} & \text{（氷…）} \end{cases}$$

$M_z = M_z^{slide}$ となるときのよじれ角を $\delta_{\alpha z}^c$ とすると（シリケイトなどで $\delta_{\alpha z}^c \simeq 1.1°$）

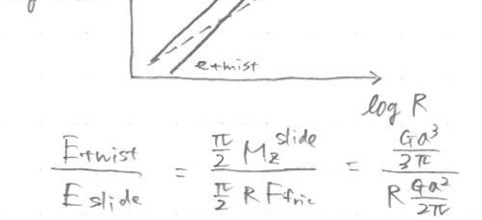
$\delta_{\alpha z}^c$ をこえると滑り始め，よじれが生じる.

よじれ始めるのに必要なエネルギー

$$e_{twist} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha z}^c M_z^{slide} = \frac{3}{32 G a^3}(M_z^{slide})^2 = \frac{8}{3} G a^3 \delta_{\alpha z}^{c\,2}$$

十分な角度（$\frac{\pi}{2}$）よじれるために必要なエネルギー

$$E_{twist} = \frac{\pi}{2} M_z^{slide} = \frac{8}{3}\pi G a^3 \delta_{\alpha z}^c$$



$$\left(\begin{array}{llll} a \sim a_0 \text{ とすると} & M_z^{slide} \propto a^3 & \propto & R^2 \\ e_{twist} & \propto a^{-3}(M_z^{slide})^2 & \propto & R^2 \\ E_{twist} & \propto M_z^{slide} & \propto & R^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{E_{twist}}{E_{slide}} = \frac{\frac{\pi}{2}M_z^{slide}}{\frac{\pi}{2} R F_{fric}} = \frac{\frac{Ga^3}{3\pi}}{R\frac{Ga^2}{2\pi}} \sim \frac{a}{R}$$

E_{twist} は E_{slide} に比べて一桁程度小さい（同じ90°回転でも滑る距離が小さい）

よじれによる構造変化は難しい（滑りよりは容易）