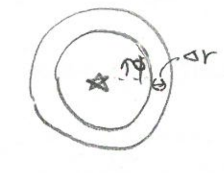
3.2.3 Temperature profile of accreting disks

accreting disk の radial 方向の有効温度を求める。

幅 Δr のリングの総トルクを考える。

$\rightarrow \dfrac{\partial G}{\partial r}\Delta r$ （G: φ方向とz方向に積分した値での総トルク
その差分をとっている）

$$\underbrace{\frac{G(r+\Delta r)-G(r)}{\Delta r}}_{\lim_{\Delta r\to 0}}\cdot\Delta r$$



仕事率は、

$$\Omega\underbrace{\frac{\partial G}{\partial r}\Delta r}_{\text{総トルク}} = \left[\frac{\partial}{\partial r}(G\Omega) - G\Omega'\right]\Delta r, \quad (3.28)$$

ただし、$\Omega' = \dfrac{d\Omega}{dr}$

G: [dyn·cm] (N·m)

$\left(\frac{\partial G}{\partial r}\Delta r\right) = [g\cdot cm^2\cdot s^{-2}]$

Ω: [rad·s^{-1}]

(3.28) 右辺について、

第一項：$\dfrac{\partial}{\partial r}(G\Omega)$

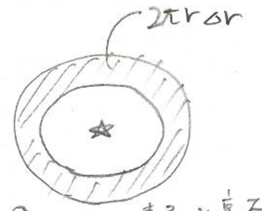
$$G\Omega = |F\times r|\cdot\frac{v_{rot}}{r} = Fv \quad [J\cdot s^{-1}]$$

リングを通しての、粘性トルクによるエネルギーの輸送
つまりは $G\Omega|_{out} - G\Omega|_{in}$ なので、境界条件により決まる.

第二項：$-G\Omega'$

ローカルな、エネルギーロス、

$$\left(\Omega' = \frac{d\Omega}{dr}\right)$$



エネルギーのロスは、熱と放射となる。

円盤の単位表面積あたりからのエネルギーロスは

表面と裏面があるのでさらに2が加わる.

$$D(r) = \frac{G\Omega'}{4\pi r} = \frac{9}{8}\nu\Sigma\Omega^2 \quad (\Omega = \Omega_{kep}\text{ を仮定}) \quad (3.29)$$

$$\left(\because\ G = 2\pi r\cdot\nu\Sigma r\frac{d\Omega}{dr}r,\quad \Omega' = \frac{d\Omega}{dr} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_*}{r^5}} = -\frac{3}{2}\frac{\Omega}{r}\right.$$

$$\frac{G\Omega'}{4\pi r} = \frac{\cancel{2\pi r}}{\cancel{4\pi r}}\frac{1}{2}\cdot\nu\Sigma r^2\cdot\Omega'^2$$

$$\left.= \frac{9}{8}\nu\Sigma\Omega^2\right)$$

Blackbody radiation を考えて、

$$D(r) = \sigma T^4_{disk}$$

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1-\sqrt{\frac{R_*}{r}}\right)$$

これと、円盤進化の式の定常解 (3.20) を用いて、

かつ $\Omega = \Omega_{kep}$ を用いると、(3.29) より、

$$T^4_{disk} = \frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\left(1-\sqrt{\frac{R_*}{r}}\right) \quad (3.30)$$

- inner boundary から離れると $(r \gg R_*)$、

  $T_{disk} \propto r^{-\frac{3}{4}}$

- razor-thin disk (flat で厚みのない disk モデル) と同じ形 $(\propto r^{-\frac{3}{4}})$

- viscosity に依存しない

  - 不定性がない点うれしいが、逆に観測から ν に関する知識は得られない

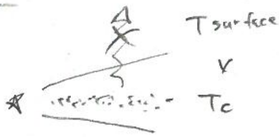
$\dot{M} = 10^{-7}\, M_\odot\, yr^{-1}$ とすると

太陽質量の星に対する、1AU での有効温度は

$T_{disk} = 150$ K

これは表面温度

3.3 Vertical structure of protoplanetary disks

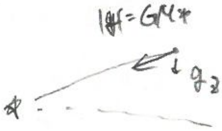


- 重力ポテンシャルエネルギーが解放されて熱になる
  これは、密度が最も大きい円盤のmid-planeに集中してるだろう。
- 円盤では大体の場所で τ があつい → 放射で直接熱を逃がせない。
  → 乱流か放射拡散 (turbulence or radiative diffusion)
- ここでは、accreting diskの鉛直方向の温度勾配を計算する。
  - ほぼすべてのモデルで viscosityの強さはdisk表面より、中心の状態によるので大事
- viscosityのモデルと鉛直構造から
  円盤構造と進化の自己矛盾のないモデル (self-consistent model)
  を導く。

平行平面を考える。また、エネルギーの輸送はradiative diffusionによるとする。解くべき式は、

1. 静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium)

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z \qquad (3.31)$$



g_z は鉛直方向の重力 (式(2.5))

2. flux F_z の鉛直方向の変化

$$\frac{dF_z}{dz} = \frac{9}{4}\rho \nu \Omega^2 \qquad (3.32)$$

片面とかじゃなく上下両辺のfluxを考えるので×2

(∵ 式(3.29)より)

3. 放射拡散の式 (optically thickな媒質でのfluxと温度勾配の関係)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{3\kappa_R \rho}{16\sigma T^3} F_z \qquad (3.33)$$

(導出は後のページ)

+ eq. of state（P, ρ, Tの関係）、Rossland mean opacity κ_R、

boundary condition + viscosity ?

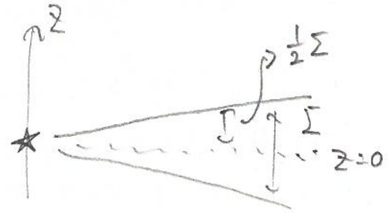
もし、求まった温度勾配が断熱状態でのそれより大きかったら

+ 対流 flux が必要。（勾配がきつかったら）

3.3.1 The central temperature of accreting disks

仮定．$z=0$に近いほど、viscosityによる

エネルギー散逸は強い



mid-plane から表面までの τ

$$\tau = \frac{1}{2}\kappa_R \Sigma \qquad (3.34)$$

κ_R: Rossland mean opacity

Σ: 表面密度

$\rho(z)$: 密度の鉛直プロファイル

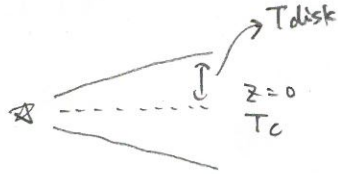
鉛直方向のエネルギー輸送は、放射拡散

$$F_z(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho}\frac{dT}{dz} \qquad (3.35)$$

簡単のために、エネルギー散逸は全て $z=0$ でおこるとする。

このとき、$F_z(z) \fallingdotseq \sigma T_{disk}^4 = \text{const}$

$\kappa_R = \text{const}$ も仮定



$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R\rho}\frac{dT}{dz} = \sigma T_{disk}^4$$

$$-\frac{16}{3\kappa_R}\int_{T_c}^{T_{disk}} T^3\, dT = T_{disk}^4 \int_0^z \rho(z')\, dz' \qquad (3.36)$$

$$-\frac{16}{3\kappa_R}\left[\frac{T^4}{4}\right]_{T_c}^{T_{disk}} = T_{disk}^4 \frac{\Sigma}{2} \qquad (3.37)$$

$\tau \gg 1$ なので、 $T_c^4 \gg T^4_{disk}$ と思う。

$$-\frac{16}{3\kappa_R}\left[\frac{T^4}{4}\right]_{T_c}^{T_{disk}} = -\frac{4}{3\kappa_R}\left(T_{disk}^4 - T_c^4\right) \sim \frac{4}{3\kappa_R}T_c^4$$

よって

$$\frac{T_c^4}{T_{disk}^4} \simeq \frac{3}{4}\kappa_R\cdot\frac{\Sigma}{2} = \frac{3}{4}\tau \qquad (3.38)$$

。 $\tau \gg 1$ の active disks では、表面より中心の方が熱い。
　例えば、$\tau = 10^2$ だと $T_c \approx 3\,T_{disk}$

。 氷とかミネラルとか存在できるかが決まる。

accretion によるヒーティングに加えて、星からの放射が加わる場合

$T_{disk,visc}$ ≡ さっきまでの T_{disk}

: accretion による有効温度

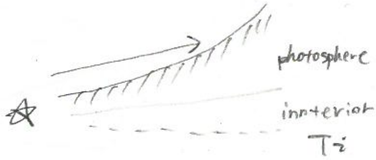
T_{irr} : 放射のみに :

$$T_c^4 \simeq \frac{3}{4}\tau T^4_{disk,visc} + T_{irr} \qquad (3.39)$$

これも $\tau \gg 1$ で正しいことに注意

T_{irr} は passive で放射平衡にある disk での

T_i (interior temperature)



3.3.2 Shakura - Sunyaev α prescription

accreting disk の有効温度（式3.30）は粘性係数 ν とは独立.

⇔ 円盤進化のタイムスケール, 面密度プロファイルは, ν に依存.

やっぱり ν を考えないとだめ。粘性による角運動量輸送の根本的な物理は何か.

① Molecular collisions (molecular viscosity)

地球流体では一般的で

ナビエ・ストークスの式 (Navier - Stokes equations) でモデル化される。

近似的に

$$\nu_m \sim \lambda c_s \qquad (3.40)$$

λ: mean-free path

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{mol}} \qquad (3.41)$$

σ_{mol} : cross-section for molecular collisions

オーダーでの見積り

$$\sigma_{mol} \approx 2 \times 10^{-15} \ \mathrm{cm}^2 \qquad (3.42)$$ 水素同士の衝突の cross section

$$c_s = 0.5 \ \mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{at} \quad 10 \ \mathrm{AU}$$

$$n = 10^{12} \ \mathrm{cm}^{-3}$$

$$\rightarrow \nu_m \sim 2.5 \times 10^7 \ \mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$$

$t \sim \frac{r^2}{\nu}$ 拡散方程式より

そのタイムスケールは, (式 3.11) より.

$$t_\nu \simeq \frac{r^2}{\nu_m} = 3 \times 10^{13} \ \mathrm{yr} \qquad (3.43)$$

⇔ 観測から円盤進化のタイムスケール $\sim 10^6$ yr
10^7 くらい異なる.

Molecular viscosity ではなさそう.

※ 粘性係数の小ささについて

Reynolds 数は、

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu_m} \qquad (3.44)$$

U, L : 系を特徴づける速度と長さ

で定義される.

$U = c_s$、$L = h = 0.05\,r$ とすると、10 AU で

$$Re \sim 10^2$$

とかなり大きくなる.

diskに対して小さい系で散逸がある → 乱流

② turbulence

乱流がおよそ等方的であるとき、

- 乱流の大きさは、円盤の最も小さいスケール以下 

(一般にスケールハイト : h)

- 乱流の速度は c_s 以下

超音速だと shock を起こしてすぐ散逸する.

よって turbulent viscosity は、

$$\nu = \alpha c_s h \qquad (3.46)$$

と書ける.

α : Shakura-Sunyaev α parameter

無次元量で、乱流による角運動量輸送の効率を示す.

式(3.46)について

。粘性係数νが、diskのlocalな量(c_s, h)で書ける

→ diskのlocalな構造が計算できる。

。αは1より小さい(これは制限)が、定数である必要はない

温度、密度、gasの成分により変化する。

。molecular viscosityと同じ次元をもつが、全く異なるプロセスからきてることに注意。

特に、molecular viscosityに対して正しい、ナビエ・ストークスを使うのは、やめた方がいい。

3.3.3 Vertically averaged solutions.

。(3.46)を用いて、νをr, Σ, αの関数で書ける。

。νは、定常解(3.20)を求められる。

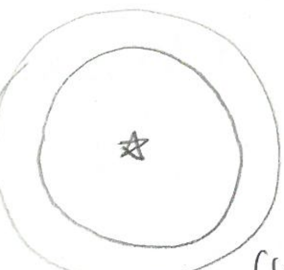
。式(3.6)の円盤進化の式と合わせて、任意の初期面密度に対する、時間進化の解が得られる。

vertically averaged or "one zone" 近似　$\frac{T_c^4}{T_{disk}^4} \simeq \frac{3}{4}\tau$

. eq. of radiative diffusion 式(3.33) → 近似解(3.38)

鉛直方向のまわりzに依存するパラメータ → z=0の値

リングを考える



surface density : Σ → 解がほしい

angular velocity : $\Omega = \Omega_K = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$ 既知

mid-plane Temp. : T_c　　scale hight : h

effective 〃 : T_{disk}　　opacity : κ_R

sound speed : c_s　　viscosity : ν

(volume) density : ρ　　optical depth : τ

T_{disk}と τ 以外は、全て $z=0$ の値を考える

T_{disk} : photosphere で定義される.

τ : 表面と mid-plane の間で決まる.

式をまとめると.

$$\nu = \alpha c_s h \quad (3.47)$$

$$c_s^2 = \frac{k_B T_c}{\mu m_p} \quad (3.48)$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma}{h} \quad (3.49)$$

$$h = \frac{c_s}{\Omega} \quad (3.50)$$

$$T_c^4 = \frac{3}{4} \tau T_{disk}^4 \quad (3.51)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \Sigma \kappa_R \quad (3.52)$$

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \quad (3.53)$$

$$\sigma T^4_{disk} = \frac{9}{8} \nu \Sigma \Omega^2 \quad (3.54)$$

κ_R が決まれば、変数8コに式8コで解ける.

κ_R が密度と温度の power-law と近似できるなら、ν は r, α, Σ の power-law となる.

例) mid-plane の opacity が氷粒子による disk を考える.

このとき、近似的に

$$\kappa = \kappa_0 T_c^2 \qquad (3.55)$$

$$\kappa_0 = 2.4 \times 10^{-4}$$

らしい...

上の式から変数を消して (ρ の分、一コ式があまる)

$$\Sigma^3 = \frac{64}{81\pi} \frac{\sigma}{\kappa_0} \left(\frac{\mu m_p}{k_B} \right)^2 \alpha^{-2} \dot{M} \quad (3.56)$$

accretion rate $\dot{M} = 10^{-7}\ M_\odot\ yr^{-1}$

$\alpha = 0.01$

に対して. $\Sigma \approx 140\ g \cdot cm^{-2}$

$\Leftrightarrow$ $\nu \approx 5 \times 10^{15}\ cm^2 \cdot s^{-1}$ に対応

タイムスケール at 30 AU は

$\sim 1.3 \times 10^6\ yr$

a few $\times 10^6$ とコンシステント

観測から $\alpha \sim 10^{-2}$