⑤ 円盤の自己重力不安定の条件

Gravitationally Unstable condition of disks

分散関係式 (dispersion relation)

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 |k| \quad \text{—①}$$

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + 2r\Omega \frac{d\Omega}{dr}$$: エピサイクリック振動数 (Epicyclic frequency)

* Kepler回転のとき (If we assume Kepler rotation)

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \text{ より } \kappa^2 = \Omega^2$$

①において ω^2 が極小になる k を求める

ω^2 becomes minimum whe wave number k statisfy the following condition!

$$\frac{d\omega^2}{dk} = 0 \text{ より } c_s^2 \cdot 2k - 2\pi G \Sigma = 0$$

$$\therefore k_{min} = \frac{\pi G \Sigma}{c_s^2}$$

このとき

$$\omega^2(k_{min}) = \kappa^2 + \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} - \frac{2\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} = \kappa^2 - \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2}$$

$\omega^2(k_{min}) < 0$ のとき円盤は全ての波数に対して不安定

If $\omega^2(k_{min}) < 0$, disk is unstable for all wavenumber.

このとき $\omega^2(k_{min}) = \kappa^2 - \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} < 0$

$$\therefore \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma_0} < 1 \quad (\because \kappa^2 = \Omega^2)$$

$Q \equiv \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma_0}$: Toomre's Q

◦ 円盤の重力不安定条件

Gravitationally unstable condition of disk

$M_{disk} \sim \pi r^2 \Sigma$: disk mass (円盤質量)

$H \sim \frac{c_s}{\Omega}$: scale height (スケールハイト)

$\Omega^2 = \frac{GM_*}{r^3}$

これより

$$Q \equiv \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma_0} < 1$$

$$\leftrightarrow \frac{M_{disk}}{M_*} > \frac{H}{r} \sim 0.05 - 0.1$$

class 0/I → gravitationally unstable

$\because$ M_* : small, M_{disk} : large

$$* \; Q = \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma_0} = \frac{H\Omega^2}{\pi G \Sigma_0} = \frac{H \cdot GM_*/r^3}{GM_{disk}/r^2} = \frac{M_*}{M_{disk}} \frac{H}{r} < 1$$